1. Предел и непрерывность функций одной и нескольких переменных. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Рассмотрим ф-ю y=f(x): $\{x\}\subset R\to R$, т. а: в $\forall\ U_\varepsilon(a)$ имеются точки {x}, отличные от а.
Опр Число b называется **предельным значением** ф-ии y=f(x) в точке x=a (или пределом ф-ии при $x\to a$), если для $\forall$ сходящейся к а последовательности $x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots$ значений аргумента x, элементы x_n которой отличны от а, соответствующая последовательность $f(x_1),\ldots,f(x_n),\ldots$значений функции сходится к b.
Аналогичным образом определяются прав. и лев. пред. знач. ф-ии.

$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

Теорема f(x), g(x) на {x}, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b, \lim\limits_{x\to a} g(x)=c\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)\pm g(x)=b\pm c,\ \lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=b\cdot c,\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c}\quad (c\neq 0)$$

Опр Ф-я f(x) называется **непрерывной в т. а**, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Теорема Пусть f(x), g(x) на {x} непр. в точке а $\Rightarrow$ f(x)±g(x), f(x)· g(x), f(x)/g(x) ($g(a)\neq 0$) непрерывны в т.а.

Пусть $x=\varphi(t)$ на {t}, {x}-ее множество значений, y=f(x) на {x} $\Rightarrow$ на {t} задана сложная ф-я y=f(x), где $x=\varphi(t)$, или $y=f[\varphi(t)]=F(t)$
Теорема Если ф-я $x=\varphi(t)$ непр в точке а, а ф-я y=f(x) непр в точке $b=\varphi(a)$, то $y=f[\varphi(t)]=F(t)$ непр в точке а.

Опр Число b называется **предельным значением** ф-ии f(x) в точке а, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$:
$\forall x$: $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-b|<\varepsilon$
Опр Ф-я f(x) называется **непрерывной в точке** x=a, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x$: $|x-a|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$
Опр f(x) удовлетворяет в т x=a **условию Коши**, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x', x''$: $0<|x'-a|<\delta$, $0<|x''-a|<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$
Теорема (Критерий Коши) $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow f(x)$ удовлетворяет в точке а условию Коши

Свойства ф-й, непрерывных на отрезке

1. Если f(x) непр в точке а, и $f(a)\neq 0$, то $\exists\delta$-окрестность точки а: $\forall x\in U_\delta(a)$ $f(x)\neq 0$ и sgn f(x)=sgn f(a)
2. Пусть f(x) непр на [a, b] и sgn f(a)≠ sgn f(b) $\Rightarrow \exists\xi\in(a, b)$: $f(\xi)=0$
3. Пусть f(x) – непр на [a, b], f(a)=A, f(b)=B. Пусть $C\in[A, B] \Rightarrow \exists\xi\in[a, b]$: $f(\xi)=C$
4. Если f(x) непр на [a, b] $\Rightarrow$ f(x) огр на [a, b]
5. Пусть f(x) огр сверху (снизу). Число M (m) называют точной верхней (нижней) гранью ф-ии f(x) на [a, b], если: 1) $\forall x\in[a, b]$ $f(x)\leq M$ ($f(x)\geq m$); 2)$\forall\varepsilon>0\ \exists x\in[a, b]$: $f(x)>M-\varepsilon$ ($f(x)<m+\varepsilon$)

$$M=\sup_{[a,b]} f(x),\quad m=\inf_{[a,b]} f(x)$$

Теорема Если f(x) непр на [a, b], то она достигает на [a, b] своих точных верней и нижней граней
Опр Ф-я f(x) называется **равномерно непрерывной** на {x}, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $\forall x', x''\in\{x\}$: $|x'-x''|<\delta$ $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$
Теорема Непрерывная на [a, b] ф-я f(x) равномерно непрерывна на [a, b]

NB На неограниченном мн-ве это не так. Контрпример: $y=x^2$

2. Производная и дифференциал функций одной и нескольких переменных. Достаточное условие дифференцируемости.

Пусть ф-я y=f(x) определена на (a, b)

Опр **Производной ф-ии** y=f(x) в данной т. x называется предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$, если предел сущ-ет.

Опр Ф-я y=f(x) называется **дифференцируемой в данной точке x**, если приращение Δy этой функции в т. x, соответствующее приращению Δx, может быть представлено в виде Δy=AΔx+αΔx, где A – const, не зависящая от Δx, α→0 при x→0.

Теорема Ф-я y=f(x) является дифференцируемой в точке x ⇔ f(x) имеет в точке x конечную производную.

Опр **Дифференциалом** ф-ии y=f(x) в точке x, соответствующим приращению Δx, называется главная линейная относительно Δx часть приращения этой ф-ии в точке x.dy=AΔx=f'(x)Δx dx – дифференциал независимой переменной x - ∀ число. Пусть dx=Δx ⇒ $dy=f'(x)dx \Rightarrow f'(x)=\frac{dy}{dx}$

Теорема Пусть y=f(x) в окрестности точки x_0 возрастает (убывает) и непрерывна.y=f(x) дифференцируема в x_0 и $f'(x_0)\neq 0 \Rightarrow \exists x=f^{-1}(y)$, которая дифференцируема в $y_0=f(x_0)$ u $x'(y_0)=1/f'(x_0)$

Теорема Пусть x=φ(t) дифф в точке t_0 , а y=f(x) дифф в точке $x_0=\varphi(t_0)$ ⇒ сложная ф-я y=f(φ(t)) дифф в точке t_0 u $[f(\varphi(t_0))]'=f'(x_0)\varphi(t_0)$.

Инвариантность формы 1 дифференциала dy=f'(x)dx не только в случае, когда x – независимая переменная

Пусть y=f(φ(t)), y'=f'(x)φ'(t)

$\varphi'(t)=\frac{dx}{dt}, y'=\{f[\varphi(t)]\}'=\frac{dy}{dt}\Rightarrow\frac{dy}{dt}=f'(x)\frac{dx}{dt}\Rightarrow dy=f'(x)dx \quad \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$

Теорема (Ролля) f(x)∈C[a, b] и дифф на [a, b], f(a)=f(b) ⇒ ∃ξ∈[a, b]: f'(ξ)=0

Теорема (Лагранжа)f(x)∈C[a, b] и дифф на [a, b] ⇒ ∃ξ∈[a, b]: f(b) - f(a)=f'(ξ)(b - a)

Функции n переменных

Опр Если ∃ предел частного приращения $\Delta_{x_k}u$ в точке $M(x_1\ldots x_m)$

$\frac{\Delta_{xk}u}{\Delta x_k}=\frac{f(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},\ldots,x_m)-f(x_1,\ldots,x_m)}{\Delta x_k}$, соответствующий приращению Δx_k аргумента x_k , при $\Delta x_k\to 0$, то этот предел называется **частной производной** ф-ии $u=f(x_1\ldots x_m)$ в точке M по аргументу x_k , и обозначается $\frac{\partial u}{\partial x_k}=\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta_{xk}u}{\Delta x_k}$.

Опр Ф-я $u=f(x_1\ldots x_m)$ называется **дифференцируемой в данной точке** $M(x_1\ldots x_m)$, если $\Delta u=A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\ldots+A_m\Delta x_m+\alpha_1\Delta x_1+\ldots+\alpha_m\Delta x_m$ или $\Delta u=A_1\Delta x_1+\ldots+A_m\Delta x_m+\bar{o}(\rho),\quad \rho=\sqrt{\Delta x_1^2+\ldots+\Delta x_1^2}$

$A_1\Delta x_1+A_2\Delta x_2+\ldots+A_m\Delta x_m$ – главная линейная отн-но приращений аргументов часть приращения дифференцируемой ф-ии (если $A_1\ldots A_m\neq 0$ одновременно)

Теорема Если $u=f(x_1\ldots x_m)$ дифф-ма в точке M, то в этой точке ∃ частные производные по всем аргументам: $\frac{\partial u}{\partial x_i}=A_i$, i=1…m

Следствие: $\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\Delta x_m+\bar{o}(\rho)$

Если $u=f(x_1\ldots x_m)$ дифф-ма в точке M, то она и непр в этой точке.

Теорема (достаточное условие дифф-ти) Если ф-я $u=f(x_1\ldots x_m)$ имеет частные производные по всем аргу-ментам в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0,\ldots,x_m^0)$ и они непр в M_0, то эта ф-я дифф-ма в точке M_0.

Опр **Дифференциалом** du ф-ии $u=f(x_1\ldots x_m)$, дифф-мой в точке M, называется главная линейная относительно приращений аргументов часть приращения этой ф-ии в точке M: $du=\frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}dx_m$

3. Определенный интеграл и его свойства. Основная формула интегрального исчисления.

Пусть

- $f(x)$ определена в каждой точке на $[a,b]$
- Разбиение $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$
- $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$

Опр Число $I\{ x_i , \xi_i \} = f(\xi_1)*\Delta x_1 + f(\xi_2)*\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)*\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ называется **интегральной суммой** функции $f(x)$, соответсвующей данному разбиению T. Число $\Delta = \max_i \Delta x_i$ называется **диаметром разбиения** T.

Опр Число I называется **пределом интегральной суммы** $I\{ x_i , \xi_i \}$ при $\Delta \to 0$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, что $\forall\ T : \Delta < \delta$ независимо от выбора ξ_i справедливо $| I\{ x_i , \xi_i \} - I | < \varepsilon$. Конечный I называется **определенным интегралом** функции $f(x)$ на $[a,b]$. •

Опр Функция $f(x)$ называется **интегрируемой** на $[a,b]$, если существует конечный I.

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, то есть $\exists$ $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i-1,x_i]} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x\in[x_i-1,x_i]} f(x)$

Определим

$$\overline{S} = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$ (**Верхняя интегральная сумма**)

$$\underline{s} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$ (**Нижняя интегральная сумма**)

функции $f(x)$ для данного разбиения T отрезка $[a,b]$. Очевидно, что $\underline{s} \le I\{x_i ,\xi_i\} \le \overline{S}$.

Теорема $\forall$ фиксированного разбиения T, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \xi_i \in[x_{i-1}, x_i]$: $0 \le \overline{S} - I\{x_i ,\xi_i\} \le \varepsilon$.

Теорема $\forall$ фиксированного разбиения T, $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \xi_i \in[x_{i-1}, x_i]$: $0 \le I\{x_i ,\xi_i\} - \underline{s} \le \varepsilon$.

Теорема Пусть разбиение T’ получено из T добавлением новых точек $\Rightarrow$ $\overline{S}' \le \overline{S}, \underline{s}' \ge \underline{s}$.

Теорема Пусть T’, T’’ - $\forall$ разбиения отрезка $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\underline{s}' \le \overline{S}'', \underline{s}'' \le \overline{S}'$

Теорема {S} - множество, ограниченное снизу, {s} - ограниченное сверху.

Опр $\bar{I} = \inf\limits_{\forall T}\{\overline{S}\}, \underline{I} = \sup\limits_{\forall T}\{\underline{s}\}$ называются **верхней и нижней суммами Дарбу** от $f(x)$. **Теорема** $\underline{I} \le \bar{I}$.

Теорема Пусть разбиение T’ получено из T добавлением p новых точек $\Rightarrow$
$\overline{S} - \overline{S}' \le (M - m)p\Delta, \underline{s}' - \underline{s} \le (M - m)p\Delta$.

Лемма Дарбу $\bar{I} = \lim\limits_{\Delta\to 0}\overline{S}, \underline{I} = \lim\limits_{\Delta\to 0}\underline{s}$.

Теорема Ограниченная на $[a,b]$ функция $f(x)$ интегрируема $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists$ разбиение T: $S - s < \varepsilon$.

Свойства определенных интегралов

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

3. $\int_b^a [f(x) \pm g(x)]dx = \int_b^a f(x)dx \pm \int_b^a g(x)dx$, если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$.

4. Пусть f,g интегрируемы на $[a,b]$ $\Rightarrow$ f*g интегрируемы на $[a,b]$.

5. $\int_b^a cf(x)dx = c\int_b^a f(x)dx$

6. Пусть f интегрируема на $[a,b]$ $\Rightarrow$ f интегрируема на$\forall$ $[c,d] \subset [a,b]$.

7. Если f интегрируема на [a,c] и [c,b] $\Rightarrow$ f интегрируема на [a,b] и $\int\limits_b^a f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

8. Пусть f интегрируема и неотрицательна на [a,b] $\Rightarrow \int\limits_b^a f(x)dx \ge 0$.

9. Пусть f интегрируема, неотрицательна и отлична от нуля на [a,b] $\Rightarrow \int\limits_b^a f(x)dx \ge C > 0$.

10. Пусть f,g интегрируемы на [a,b] и выполняется f≥g везде на [a,b] $\Rightarrow \int\limits_b^a f(x)dx \ge \int\limits_b^a g(x)dx$.

11. Пусть f интегрируема на [a,b] $\Rightarrow$ |f| интегрируема на [a,b] и $|\int\limits_b^a f(x)dx| \le \int\limits_b^a |f(x)|dx$.

12. Пусть f,g интегрируемы на [a,b], g≥0, M и m - точные верхняя и нижняя грани f(x) на [a,b] $\Rightarrow$

$m\int\limits_b^a g(x)x \le \int\limits_b^a f(x)g(x)dx \le M\int\limits_b^a f(x)dx$.

13. Пусть f,g интегрируемы на [a,b], g≥0, M и m - точные верхняя и нижняя грани f(x) на [a,b] $\Rightarrow$

$\exists\mu$: $m \le \mu \le M$, $\int\limits_b^a f(x)dx = \mu(b-a)$.

<u>Теорема (Основная формула интегрального исчисления)</u> Пусть f(x) интегрируема на любом сегменте из (a,b). Пусть c $\in$ (a,b) $\Rightarrow$ $\forall$x $\in$ (a,b) f(x) интегрируема на [c,x] $\Rightarrow$ на (a,b) определена функция $F(x) = \int\limits_c^x f(t)dt$ - интеграл с переменным верхним пределом.

Утверждение: любая непрерывная на (a,b) функция f(x) имеет на этом интервале первообразную. Одной из них является функция $F(x) = \int\limits_c^x f(t)dt$, где c $\in$ (a,b).

Любые две первообразных функции f(x) отличаются на const $\Rightarrow$ любая первообразная для непрерывных на [a,b] функций имеет вид $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C$. Пусть x = a $\Rightarrow$ Ф(a) = C, x = b $\Rightarrow$

$\Phi(b) = \int\limits_a^b f(t)dt + C \Rightarrow \underline{\int\limits_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)}$. **(Основная формула интегрального исчисления).**

4. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости: Даламбера, интегральный, Лейбница.

Числовой ряд: $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}u_k$. **N-ная частичная сумма**: $u_1+u_2+\ldots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=S_n$.

Опр Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ **сходится**, если существует конечный $\lim_{n\to\infty}S_n=S$. Число S называется **суммой ряда**.
Если предел $\lim_{n\to\infty}S_n$ не существует, то ряд расходится.

Т (Критерий сходимости ряда Коши) Для того, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ сходился ⇔ $\forall\varepsilon>0\ \exists$ N: $\forall n\geq N$ и p = 1,2,... $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}u_k\right|<\varepsilon$

Следствие. Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}u_k=0$.

Т (Критерий сходимости ряда с неотрицательными членами) Для того, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$, где $u_k\geq 0$, сходился ⇔ последовательность частичных сумм ограничена.

Признаки сравнения:

1. Рассмотрим два ряда с неотрицательными членами: $\sum_{k=1}^{\infty}p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}p'_k$. Пусть ∀k $p_k\leq p'_k$, тогда из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty}p'_k$ следует сходимость $\sum_{k=1}^{\infty}p_k$, из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty}p_k$ следует расходимость $\sum_{k=1}^{\infty}p'_k$.
2. Рассмотрим два ряда с положительными членами: $\sum_{k=1}^{\infty}p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}p'_k$. Пусть ∀k $\frac{p_{k+1}}{p_k}\leq\frac{p'_{k+1}}{p'_k}$, тогда из сходимости $\sum_{k=1}^{\infty}p'_k$ следует сходимость $\sum_{k=1}^{\infty}p_k$, из расходимости $\sum_{k=1}^{\infty}p_k$ следует расходимость $\sum_{k=1}^{\infty}p'_k$.

Т (Признак Даламбера) Если для любого k, начиная с некоторого номера, справедливо неравенство $\frac{p_{k+1}}{p_k}\leq q<1\left(\frac{p_{k+1}}{p_k}\geq 1\right)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}p_k$ сходится (расходится). Если $\lim_{k\to\infty}\frac{p_{k+1}}{p_k}=L$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}p_k$ сходится при L < 1 и расходится при L > 1.

Т (Признак Коши)

1. Если для любого k, начиная с некоторого номера, справедливо неравенство $\sqrt[k]{p^k}\leq q<1\left(\sqrt[k]{p^k}\geq 1\right)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}p_k$ сходится (расходится).
2. Если $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{p_k}=L$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}p_k$ сходится при L < 1 и расходится при L > 1.

Т (Интегральный признак Коши-Маклорена) Пусть f(x) - неограниченна и не возрастает на x≥m, где m - любой номер. Ряд $\sum_{k=m}^{\infty}f(k)=f(m)+\ldots$ сходится ⇔ $\exists\lim_{n\to\infty}a_n$, где $a_n=\int_m^n f(x)dx$.

Опр Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ **абсолютно сходится**, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$.Из абсолютной сх. ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ следует его сходимость.

Опр Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ **условно сходится**, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|$ расходится.

Опр Последовательность $\{v_k\}$ называется **послед. с ограниченным изменением**, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|v_{k+1}-v_k|$.

Теорема Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ обладает ограниченной последовательностью частичных сумм, а $\{v_k\}$ - последовательность с ограниченным изменением, сходящаяся к 0, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k$ сходится.

Опр Знакочередующийся ряд (нечетные с '+', четные - с '-') , модули членов которого образуют невозрастающую сходящуюся к 0 последовательность, называется **рядом Лейбница**.

Т (Признак Лейбница) Любой ряд Лейбница сходится.

5. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывной функции.

Пусть в E^m задано {x}. Если $\forall n = 1,2,..$ ставится в соответствие по определенному закону функция $f_n(x)$, определенная на {x}, то множество занумерованных функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... ,$f_n(x)$,... будем называть **функциональной последовательностью(ФП)**. {x} - **область определения функциональной последовательности** $\{f_n(x)\}$. Рассмотрим ФП $\{u_n(x)\}$.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ - **функциональный ряд (ФР).** $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ - **n-я частичная сумма ФР**. Изучение ФП эквивалентно изучению ФР, так как каждой ФП соответсвует ФР, каждому ФР - ФП. Фиксируем любой $x_0 \in \{x\}$ и рассмотрим все члены ФР в точке x_0. Получим числовой ряд. Если указанный числовой ряд сходится, то **ФР сходится в точке x_0**. Множество всех точек x_0, в которых ФР сходится, **называется областью сходимости ФР**. Если ФР имеет в качестве области сходимости некоторое множество {x}, то на этом множестве определена функция S(x), являющаяся предельной функцией последовательности частичных сумм этого ряда, и называющаяся **суммой ФР**.

Опр ФП называется **равномерно сх. на множестве {x} к сумме S(x)**, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall x \in \{x\}\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Опр ФР называется **равномерно сходящимся на множестве {x} к сумме S(x),** если последовательность $S_n(x)$ его частичных сумм сходится равномерно на {x} к S(x).

Теорема ФП $\{S_n(x)\}$ является равномерно сходящейся на множестве {x} $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p = 1,2,..., \forall x \in \{x\}\ |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Следствие ФР $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно к S(x) на {x} $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon), \forall p = 1,2,..., \forall x \in \{x\}\ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$

Признак Вейерштрасса Если ФР $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ определен на {x} и если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ $\forall x \in \{x\}$, $\forall k$ справедливо $u_k \leq |c_k| \Rightarrow$ ФР сходится равномерно на {x}.

Рассмотрим x_0 - предельную точку множества {x}.

Теорема Если ФР $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на {x} к S(x) и $\forall k$

$$\exists \lim_{x \to x_0} u_k(x) = b_k \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lim_{x \to x_0} u_k(x) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Следствие Если в условиях теоремы дополнительно потребовать, чтобы $x_0 \in \{x\}$, $u_k(x)$ были непрерывны в x_0, то S(x) будет непрерывна в x_0.

6. Криволинейный интеграл. Формула Грина.

Опр. **Спрямляемая кривая** – кривая, имеющая конечную длину, при этом длиной кривой называется предел последовательности длин ломаных, вписанных в эту линию, при условии, что длина наибольшего звена > 0. Этот предел всегда ∃, но может быть = ∞ ⇒ кривая неспрямляемая.
Рассмотрим на плоскости Oxy спрямляемую кривую L, без самопересечений и самоналегания, определяющуюся следующими уравнениями:

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (a \le t \le b)$$

Будем считать её незамкнутой и ограниченной точками A(ц (a), ш(a)) и B(ц(b), ш(b))
Если на L=AB определены ф-ции f(x,y),P(x,y),Q(x,y) – непрерывные вдоль L(т.е.
$\forall \varepsilon>0 \exists \delta>0: \forall M_1, M_2 \in L\ длина\ M_1M_2<\delta \Rightarrow |f(M_1)-f(M_2)|<\varepsilon$)
Разобьем [a,b]: $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$, $[t_{k-1},t_k]$ k=1..n.
L распадается на n частичных дуг $M_0M_1\ldots M_{n-1}M_n$, $M_k(x_k,y_k)=(x_k=\varphi(t_k),y_k=\psi(t_k))$
Если Δl_k – длина k-той частичной дуги $M_{k-1}M_k$, то: {L –гладкая => φ', ψ' – непр.}

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}$$

Выберем на всех $M_{k-1}M_k$ точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$: $\xi_k=\varphi(\tau_k)$, $\eta_k=\psi(\tau_k)\in[t_k-1, t_k]$
$\Delta=\max\limits_{1\le k\le n} \Delta l_k$ - диаметр разбиения кривой L
Составим 3 интегральные У:

$$\sigma_1=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta t_k \quad \sigma_2=\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k \quad \sigma_3=\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k ,$$

где $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $\Delta y_k=y_k-y_{k-1}$
Опр. Если ∃ предел интег.суммы σ_f при $\max_k \Delta L_k \to 0$, то этот предел наз-ся **криволинейным интегралом I рода** от ф-ции f(x, y) по L и обозначается $\int\limits_L f(x,y)dl$ или $\int\limits_{AB} f(x,y)dl$ (не зависит от того, в какую сторону пробегается кривая)
Опр. Если ∃ предел интегральной суммы σ_1, σ_2 при $\max_k \Delta L_k \to 0$, то этот предел наз-ся **криволинейным интегралом II рода** от ф-ции P(x, y) (Q(x, y))по AB и обозначается $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$ (соответственно $\int\limits_{AB} Q(x,y)dl$) (зависит от того, в какую сторону пробегается кривая: меняется знак)
$\int\limits_{AB} P(x,y)dx+\int\limits_{AB} Q(x,y)dy$ - **общий интеграл II рода** и обозначается $\int\limits_{AB} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$
Опр. Кривая L- **гладкая**, если на [a,b] ∃ непр. φ'(t), ψ'(t).
Опр. **Особые точки** L- соответствующие t: $(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2=0$
Теорема. Если L – гладкая, без особых точек на [a,b], и, если f, P, Q – непр. вдоль L, то все введённые выше интегралы ∃ и вычисляются по формулам:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{AB} f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt \quad (1)$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int_a^b P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)dt \quad (2)$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int_a^b Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)dt \quad (3)$$

Опр. L – **кусочно-гладкая**, если она непр. и распадается на конечное число не имеющих общих внутренних точек кусков, каждый из которых гладкая кривая.

<u>Замечание1.</u> Если L – замкнутая, то контур обходится в положительном напр. (против часовой стрелки) $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

<u>Замечание2(Свойства).</u>

1. $\int\limits_{AB}[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]dl = \alpha\int\limits_{AB} f(x,y)dl + \beta\int\limits_{AB} g(x,y)dl$
2. Если AB=AC+CB $\Rightarrow \int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{AC} f(x,y)dl + \int\limits_{CB} f(x,y)dl$
3. $|\int\limits_{AB} f(x,y)dl| \le \int\limits_{AB}|f(x,y)dl|$
4. Существует M: $\int\limits_{AB} f(x,y)dl = lf(M)$, где l – длина L.

Формула Грина.

Пусть Oxy – плоскость в E^3, $\vec{k}$ – ед. вектор нормали к Oxy. D – односвязная обл. на Oxy и удовл.:

1) $\partial D = C$ -замкнутая, кусочно-гладкая кривая без особых точек.
2) на Oxy ∃ декартова прямоугольная система координат: все прямые || Ox и Oy пересекают C не более чем в 2-х точках.

$\vec{t}$ -единичный вектор касательной к кривой C, согласованный с $\vec{k}$ (правило буравчика).

<u>Теорема.</u> Если $\vec{a}$ - векторное поле, дифференцируемое в D, удовл. 1),2), и такое, что его производная по ∀ направлению непрерывна в $D \cup C = \overline{D} \Rightarrow \iint\limits_D (\vec{k}, rot\ \vec{a})d\sigma = \oint\limits_C (\vec{a},\vec{t})dl$

7. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Аналитическая функция

Опр. Пусть в области J компл. переменной z задана функция f(z). Если для точки $z_0 \in J$, $\exists$ при $\Delta z \to 0$ предел разностного отношения $\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$,то этот предел называется **производной** функции f(z) по комплексной переменной z в точке z_0. $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$ (1)

Теорема. (Условие Коши-Римана)Если функция $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ диф-ма в точке $z_0 = x_0 + i\,y_0$, то в точке (x_0,y_0) $\exists$ частные производные функций u(x,y) и v(x,y) по переменным x, y. Причем

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} \qquad (2)$$

Теорема.Если в точке (x_0,y_0) функции u(x,y) и v(x,y) диф-мы, а их частные производные связаны соотношениями (2), то функция $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ является диф-мой функцией комплексного переменного z в точке $z_0 = x_0 + i\,y_0$.

Опр. Если функция f(z) диф-ма во всех точках некоторой области J, а ее производная непрерывна в этой области, то функция f(z) называется **аналитической** в области J.
Из теорем 1 и 2 следует, что для аналитичности функции f(z) = u(x,y) + i v(x,y) в области J необходимо и достаточно сущ-е непрер. частных производных функций u(x,y), v(x,y), связанных условиями Коши-Римана.

Свойства аналитических функций:
1. Если функция f(z) аналитична в J, то она непрерывна в J.
2. Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ - аналитичны в J, то их сумма и произведение тоже являются аналитическими функциями в J, а функция $\varphi(z) = \frac{f_1}{f_2}$ является аналитической всюду, где $f_2(z) \neq 0$.
3. Если w = f(z) является аналитической в J, G - область значений, в G определена аналитическая функция $\xi = \varphi(\omega)$, тогда функция $F(z) = \varphi[f(z)]$ является аналитической функцией комплексного переменного z в области J.
4. Если w = f(z) является аналитической функцией в J, причем $|f'(z)| \neq 0$ в окрестности точки $z_0 \in J$, то в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ области G определена обратная функция $z = \varphi(w)$, являющаяся аналитической функцией комплексного переменного w. При этом $f'(z_0) = \frac{1}{\varphi'(\omega_0)}$.

Значение функции f(z), аналитической в J, ограниченной Г и непрерывной в $\bar{J}$, во внутренних точках этой области равно $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$

Существует производная любого порядка у функции f(z): $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$.

8. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости

Опр. **Степенным рядом** называется функциональный ряд вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ (1)
где a_0, a_1,… - вещественные числа, называемые **коэффициентами ряда**.

Любой степенной ряд сходится в точке x = 0. Рассмотрим последовательность $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$, n = 1,2,… (2).

Если последовательность (2) ограничена, то у нее ∃ конечный верхний предел, равный L, причем L ≥ 0 (т.к. элем. неотр.).

Теорема. (Коши-Адамара)

1. Если последовательность (2) неогр., то степенной ряд (1) сходится лишь при x = 0.
2. Если последовательность (2) ограничена и имеет верхний предел L > 0, то ряд (1) абсолютно сходится для ∀x: |x| < 1/L и расходится для ∀x: |x| > 1/L
3. Если L = 0, то ряд (1) сходится ∀x.

Опр. R = 1/L - **радиус сходимости**.

Ряд сходится при |x| < R и расходится при |x| > R.

Интервал сходимости: (-R,R).

При x = +R, x = -R поведение не определено (может и сходиться, и расходиться).

9. *Ряд Фурье по ортогональной системе(ОНС) функций. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля, сходимость ряда Фурье.*

Линейное пространство R **евклидово**, если:

1. (f, g) — скалярное произведение, $\forall$ f, g $\to$ число
2. (f, g) = (g, f)
3. (f+g, h) = (f, h) + (g, h)
4. (λf, g) = λ(f, g)
5. (f, f) > 0, если f$\neq$0
6. (f, f) = 0, если f=0

Линейное (евклидово) пространство **бесконечномерное**, если в этом пространстве $\exists$ $\forall$ наперёд взятое число ЛНЗ элементов.

Пример: Пространство кусочно непр. на [a, b] функций является евклидовым пространством ∞ - й размерности.

Свойства евклидова пространства бесконечной размерности:

$\forall$ f, g : $(f, g)^2 \le (f, f)(g, g)$ — **неравенство К.-Б.**

$\forall$ f введём норму $\|\cdot\|$: $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$

* $\|f\| \ge 0$, равенство $\Leftrightarrow$ $f = 0$;

* $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$;

* $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$ — неравенство треугольника

Определение: f и g **ортогональны,** если (f, g) = 0.

Определение: Последовательность $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ в R называется **ортогональной**, если $\forall i, j: i \neq j, (\psi_i, \psi_j) = 0, \|\psi_i\| = 1$.

Определение: **Ряд Фурье** элемента f по ОНС $\{\psi_k\}$ — ряд вида $\sum_{k=1}^{\infty} f_k \psi_k$, где $f_k = (f, \psi_k)$ — **коэффициент Фурье**

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k$ — **n-я частичная сумма ряда Фурье**.

Рассмотрим $\forall$ $C_1, \dots, C_n$ и $\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k$ (*)

$\|f - g\|$ — отклонение f от g.

Теорема 1: Среди всех сумм вида (*) наименьшее отклонение от элемента f по норме данного евклидова пространства имеет n-я частичная сумма ряда Фурье элемента f.

Следствие 1:

$$\forall f \in R, \forall\{\psi_k\}, \forall C_k, \forall n \Rightarrow \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \le \left\|\sum_{k=1}^{n} C_k \psi_k - f\right\|^2 \quad (1)$$

$$\forall f \in R, \forall\{\psi_k\} \Rightarrow \left\|\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} f_k^2 \quad (2)$$ — **тождество Бесселя**

Определение:ОНС $\{\psi_k\}$ называется **замкнутой,** если $\forall f \in R, \forall \varepsilon > 0$ $\exists$ линейная комбинация конечного числа элементов $\{\psi_k\}$, отклонение которой от f (по $\|\ \|$) меньше ε.

Теорема 2: $\forall f \in R, \forall ОНС\{\psi_k\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \le \|f\|^2$ — **неравенство Бесселя**

Теорема 3: Пусть $\{\psi_k\}$ — замкнутая ОНС $\Rightarrow$ $\forall f \in R$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2$.

Теорема 4: Если $\{\psi_k\}$ — замкнутая ОНС $\Rightarrow$ $\forall f$ $\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} f_k \psi_k - f\right\| = 0$

Определение :ОНС $\{\psi_k\}$ называется **полной,** если кроме нулевого элемента не существует никакого другого элемента $f \in R \perp \psi_k \forall k$.

Теорема 5: Любая замкнутая ОНС является полной.

Теорема 6: Для любой полной ОНС $\{\psi_k\}$ два различных элемента f и g $\in$ R не могут иметь одинаковые ряды Фурье.

Пусть R_0 [-π,π], рассмотрим тригонометрическую систему

$$f(x) = \bar{f}_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{f}_k \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} + \bar{\bar{f}}_k \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right)$$

$$\bar{f}_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \ \bar{f}_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx; \ \bar{\bar{f}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)$$

$$a_0 = \frac{2\bar{f}_0}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{\bar{f}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$$

$$b_k = \frac{\bar{\bar{f}}_k}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

Определение : Функция *f(x)* имеет **период Т**, если 1) *f(x)* — определена $\forall$x 2) *f(x+T)=f(x)*

Функция *f(x)* может быть равномерно приближена на сегменте [-π,π] $\Leftrightarrow$ *f(x)* непрерывна на нём и *f(-π)=f(π)*

10. Прямая и плоскость, их уравнения. Взаимное расположение прямой и плоскости. Основные задачи на прямую и плоскость.

Утверждение 1 : Если на π задана прямая L и фиксирована Oxy, то L определяется в этой системе уравнением 1-ой степени.

Утверждение 2 : Если на π фиксирована Oxy, то любое уравнение 1-ой степени с двумя переменными x и y определяют относительно этой системы координат прямую.

$L: Ax+By+C=0$ — **уравнение прямой**, $A^2+B^2\neq 0$. $\vec{n}=\{A,B\}$ — ортогонален L, $\vec{l}=\{B,-A\}\| L$

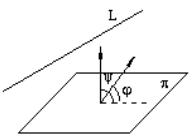
$\pi: Ax+By+Cz+D=0$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$ — **уравнение плоскости**. $\vec{n}=\{A,B,C\}\perp\pi$

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух плоскостей, определяемых уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Или в каноническом виде: уравнение прямой, проходящей через точку $M_1\{x_1,y_1,z_1\}\| q(l,m,n)$

$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ — **уравнение прямой в пространстве**.

Взаимное расположение прямой и плоскости.

$$\left[\begin{array}{l} L:\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n};\ L\|\vec{q}(l,m,n) \\ \pi: Ax+By+Cz+D=0;\ \pi\perp n(A,B,C) \end{array}\right.$$

1. $L\|\pi \Leftrightarrow \vec{q}\perp\vec{n} \Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0$
2. $L\perp\pi \Leftrightarrow \vec{n}\|\vec{q} \Leftrightarrow \frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}$
3. 

φ — угол между L и π. $\varphi=\pi/2-\psi$, ψ — угол между $\vec{n}$ и $\vec{q}$.

$$(\vec{q},\vec{n})=|q|\cdot|n|\cdot\cos\psi=\sin\left(\pi/2-\psi\right)=\sin\psi\Rightarrow\sin\psi=\frac{(\vec{q},\vec{n})}{|q|\cdot|n|}=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

4. $L\in\pi\Leftrightarrow\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\rightarrow M_1\in\pi\\ Al+Bm+Cn=0\rightarrow\vec{q}\|\pi\end{cases}$, M_1 — любая точка прямой

Основные задачи на прямую и плоскость.

1. Условие пересечения 3-х прямых в одной точке

$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0,\ L_2: A_2x+B_2y+C_2=0,\ L_3: A_3x+B_3y+C_3=0$

Пусть L_1 и L_2 — пересекаются, т.е. существует $M(x^*, y^*)$:

$A_1x^*+B_1y^*+C_1=A_2x^*+B_2y^*+C_2\Rightarrow\left.\begin{array}{l}A_1x^*+B_1y^*=-C_1\\ A_2x^*+B_2y^*=-C_2\end{array}\right\}\Rightarrow(x^*,y^*)$ — т. пересечения $\Leftrightarrow$ x^*, y^* — решение системы уравнений, т.е. $\det\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow L_1, L_2, L_3$ пересекаются $\Leftrightarrow$ L_3 проходит через $M(x^*, y^*)$ $\Leftrightarrow$

$$L_3:\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=-\gamma A_3x+(-\gamma)B_3y+(-\gamma)C_3=0$$

$$\begin{cases}\alpha A_1+\beta A_2+\gamma A_3=0\\ \alpha B_1+\beta B_2+\gamma B_3=0\\ \alpha C_1+\beta C_2+\gamma C_3=0\end{cases}\Rightarrow(\alpha,\beta,\gamma)\Leftrightarrow\det\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}\neq 0$$

2. Условие пересечения 3-х плоскостей в одной и только одной точке

$$\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}\neq 0$$

3. Уравнение прямой, проходящей через т. $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярной $\pi: Ax+By+Cz=0$

$\vec{q}=\vec{n}\Rightarrow\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$

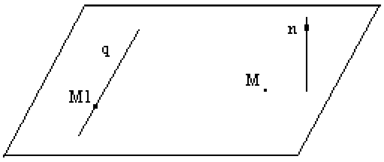
4. Уравнение плоскости, проходящей через $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной $\pi: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0$

5. Уравнение плоскости, проходящей через M_0 и перпендикулярной прямой L.

$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0$

6. Уравнение плоскости, проходящей через прямую L и точку $M_0 \notin L$



$\begin{cases} A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)+C(z_1-z_0)=0 \\ Al+Bm+Cn=0 \end{cases}$ — условие о принадлежности прямой данной плоскости. $\Rightarrow$ наруш. одно из условий $\frac{x_1-x_0}{l}=\frac{y_1-y_0}{m}=\frac{z_1-z_0}{n}$, выразим А, В через С, затем дадим С любое значение.

7. Уравнение плоскости, проходящей через M_1, M_2, M_3, не лежащих на одной прямой

$M \in \pi \Leftrightarrow \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}, \overline{M_1M}$ — компланарны $\Leftrightarrow$ смешанное произведение равно 0 $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

11. Алгебраические линии и поверхности второго порядка, канонические уравнения, классификация

Опр: Уравнение **линии 2-го порядка** имеет вид $F(x,y)=0$, где

$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$, при этом $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2=0$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, $x=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$

$F(x,y)=x^T Ax+2b^T x+a_{33}=0$.

Обозначим $I_1=trA=a_{11}+a_{22}$, $I_2=|A|$, $I_3=|B|$, где $B=\begin{pmatrix} A & b \\ b^T & a_{33} \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

I_1, I_2, I_3 являются **инвариантами линий 2-го** порядка относительно преобразований декартовой системы координат.

Геометрические характеристики линий 2-го порядка определяются значениями инвариантов I_1, I_2, I_3.

Теорема: Переносом начала координат и поворотом плоскости уравнение $F(x,y)$ можно привести к одному их следующих типов:

I. $\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+a_0=0$ ($I_2\neq 0$)

II. $\lambda_2 y^2+b_0 x=0$ ($I_2=0$, $I_3\neq 0$)

III. $\lambda_2 y^2+c_0=0$ ($I_2=0$, $I_3=0$)

Определение : Уравнения I-III типа называются **приведёнными уравнениями линий 2-го порядка** на плоскости.

Алгебраические линии 2-го порядка

I тип : $I_2\neq 0$, $I_3=\lambda_1\lambda_2 a_0$ $I_1=\lambda_1+\lambda_2$, $I_2=\lambda_1\lambda_2$, $I_3=\lambda_1\lambda_2 a_0$

1. Линии эллиптического типа. $\lambda_1\lambda_2>0$ ($I_2>0$)

   а) $\lambda_1\lambda_2 a_0<0$, $I_3<0$, канонический вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; a, b > 0. Эллипс

   б) $\lambda_1\lambda_2 a_0>0$, $I_3>0$, канонический вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$; a, b > 0. Мнимый эллипс

   в) $a_0=0$, $I_3=0$, канонический вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$; a, b > 0. Пара пересекающихся мнимых прямых

2. Гиперболический тип. $\lambda_1\lambda_2<0$, ($I_2>0$)

   а) $a_0\neq 0$, $I_3\neq 0$, канонический вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Гипербола

   б) $a_0=0$, $I_3=0$, канонический вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$. Пара пересекающихся прямых

II тип : линии параболического типа

$I_1=\lambda_2$, $I_2=0$, $I3=\lambda_2 b_0^2$, канонический вид $y^2=2px$, p>0. Парабола.

III тип : $I_1=\lambda_1$, $I2=0$, $I_3=0$

1. $\lambda_2 C_0<0$, канонический вид $y^2=a^2$. Пара параллельных прямых
2. $\lambda_2 C_0>0$, канонический вид $y^2=-a^2$. Пара мнимых параллельных прямых
3. $C_0=0$, канонический вид $y^2=0$. Пара слившихся прямых

Алгебраические поверхности 2-го порядка

$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0$ (2)

Инварианты: $I_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}$, $I_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{33} & a_{13} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}$, $I_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$, $I_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix}$

Теорема : С помощью параллельного переноса и плоских вращений уравнение (2) можно привести к одному и только одному из следующих видов:

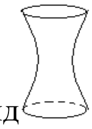
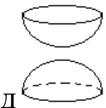
I. $\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+\lambda_3 z^2+a_0=0$ ($I3\neq 0$)

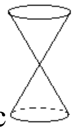
II. $\lambda_1 x^2+\lambda_2 y^2+b_0 z=0$ ($I3=0$)

III. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c_0 = 0$
IV. $\lambda_2 y^2 + p_0 x = 0$
V. $\lambda_2 y^2 + q = 0$

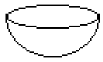
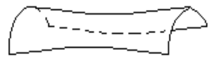
<u>I тип</u> : $I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\neq 0$

1) а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$— эллипсоид б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$— мнимый эллипсоид в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$—вырожденный элипсоид.

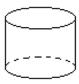
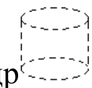
2) а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ -однополостный гиперболоид  б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$—двухпол. гиперболоид 

в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$— эллиптический конус 

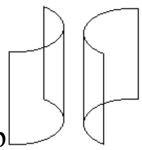
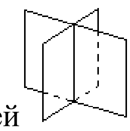
<u>II тип</u> : $I_3=\lambda_1\lambda_2 b_0\neq 0$

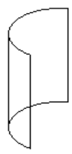
1) $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$— эллиптич. параболоид  $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$— гиперболич. -||- 

<u>III тип</u> :

1) а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$— эллиптич. цилиндр  б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$— мнимый эллиптический цилиндр 

в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ — вырожденный цилиндр •

2) а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - гиперболич. цилиндр  б) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ - пара пересек-ся плоскостей 

<u>IV тип</u> : $\lambda_2 y^2 + p_0 x = 0 : y^2 = 2px, p>0$ — параболический цилиндр 

<u>V тип</u> :

1) $\lambda_2 q_0 < 0 : y^2 = a^2$ — пара параллельных плоскостей
2) $\lambda_2 q_0 > 0 : y^2 = -a^2$ — пара мнимых параллельных плоскостей
3) $q_0 = 0 : y^2 = 0$ — пара совпадающих параллельных плоскостей

12. *Система Линейных Алгебраических Уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Общее решение системы линейных алгебраических уравнений.*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots\dots + a_{mn} = b_m, \end{cases}$$

- СЛАУ, т.е. Ax = b

Ax=0 - однородная система

Теорема. Две СЛАУ **эквивалентны,** если множества их решений совпадают.

Опр. СЛАУ **совместна**, если ∃ решение

Опр. СЛАУ **совместна определена**, если ∃ !решение

Теорема. СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей совместна и имеет единственное решение.

Правило Крамера.

Решение СЛАУ через определитель.

$$x_i = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$ или $$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n}{|A|}$$

Опр. B=(A|b)-расширенная матрица.

Теорема. Кронеккера-Капелли : СЛАУ совместна ⇔ rg B= rg A

Теорема: СЛАУ с n неизвестными имеет единственное решение ⇔ rg B= rg A=n

Опр. Однородная система всегда совместна. имеет нетривиальное решение x=0.

Теорема: Однородная система с n неизвестными имеет нетривиальное решение ⇔ rg A< n

Теорема: Однородная система с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение ⇔ |A|=0.

13. Линейный оператор в конечном пространстве, его матрица. Норма линейного оператора.

Опр. Рассмотри множество V элементов x,y,z… и поле P действительных и комплексных чисел. Пусть в V введены 2 операции: сложение($z=x+y$) и умножение на число($y=\lambda x$). Пусть введенные операции удовл.след.аксиомам:

1. $x+y=y+x$
2. $(x+y)+z=x+(y+z)$
3. $x+0=x$
4. $x+(-x)=0$
5. $1x=x$
6. $\lambda (x+y)= \lambda x+ \lambda y$
7. $(\lambda+\mu)x= \lambda x+ \mu x$
8. $(\lambda \mu)x= \lambda(\mu x)$

Тогда V называется **линейным пространством над полем P.**

Опр. Пусть даны 2 линейных пространства V и W над общим полем P. Отображение $A:V\to W$ называется **линейным отображением(оператором)**, если 1) $A(x + y) = A(x) + A(y)$; 2) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$. $\forall$ x, y $\in$ V , $\forall$ a$\in$P, $\alpha(V,W)$ - множество всех линейных операторов действующих из V в W.

Св-ва линейных операторов.

1. Лин.оп. переводит нулевой вектор в нулевой.
2. Сохраняет л.к.
3. Сохраняет лин.зав.

Теорема: $e_1, e_2,\dots e_n$ - базис в V ; $g_1, g_2,\dots g_n$ - $\forall$ вектора в W $\Rightarrow \exists!$ Лин.оп. $A:V\to W$: который переводит $e_1, e_2,\dots e_n$
в $g_1, g_2,\dots g_n$

Опр:

$Ae_1 = a_{11}f_1 + a_{21}f_2 +\dots a_{m1}f_m$

……

$Ae_n = a_{1n} f_1 + a_{2n} f +\dots a_{mn}f$, где $A = \begin{matrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{m1}\ a_{m2}\ \dots a_{mn} \end{matrix}$ **матрицы линейного оператора** A в базисе векторов e и f

Опр: $A\in L(V,W)$. **образ** A - $\operatorname{im} A = \{ y\in W \mid \exists x\in V: Ax= y\}$

ядро A - $\ker A = \{x\in V \mid Ax = 0\}$

Опр:**Нормой** в V наз. отображение $\|.\|:V\to R$, ставящее в соотв. каждому вектору x из V действительное число $\|x\|$ из R и удовлетворяющее аксиомам для любых x,y из V и α€P.

1. $\|x\|\geq 0$, равенство только при $x = 0$.
2. $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$
3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

Опр. **Подчиненной нормой оператора** наз. $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_V=1}\|Ax\|_W$

Св-ва:

1. $\|Ax\| \leq\|A\|\|x\|$

2. $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$

3. Подчиненная норма – наименьшая из всех согласованных норм

14. Ортогональные преобразования евклидова пространства. Ортогональные матрицы и их свойства.

Опр. A∈L(V,W). Тогда A^* ∈L(V,W) – сопряженный к A, если $(Ax,y)_w = (x,A^*y)_v$.

Св-ва.

1. Сопряженный оператор линеен.
2. Для любого линейного оператора существует единственный сопряженный оператор.
3. $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, $(AB)^* = B^* A^*$, $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$, $(A^*)^* = A$.
4. Для любого оператора $A \in L(V,V)$ $\det A^* = \overline{\det A}$, $rgA^* = rgA$.
5. Для любого оператора $A \in L(V,V)$ $\ker A = im^{\perp} A^*$, $\ker A^* = im^{\perp} A$.
6. Если подпространство L инвариантно относительно оператора A, то его ортогональное дополнение $L^{\perp}$ инвариантно относительно A^*.

Определение. Оператор A называется нормальным, если $A \in L(V,V)$ и $AA^* = A^*A$.

Свойства нормального оператора.

1. Собственный вектор x нормального оператора, отвечающий собственному значению λ, является собственным вектором оператора A^*, отвечающим собственному значению $\overline{\lambda}$.
2. $\ker A = \ker A^*$.
3. $\ker A = im^{\perp} A$, $\ker A^* = im^{\perp} A^*$.
4. Собственные векторы нормального оператора, отвечающие различным собственным значениям, являются попарно ортогональными.
5. Существует ортонормированный базис из собственных векторов нормального оператора.
6. В унитарном пространстве A и A^* имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов, если A нормален.

Опр. Оператор U ортогонален, если $U^*U = UU^* = I$

Св-ва:

1. U ортогонален ⇔влюбом ортонормированном базисе он имеет ортогон.матрицу
2. |detU|=1
3. Орт.оператор нормален

Теорема: В орт.пространстве след.утв.равносильны:

1. U-ортогонален
2. $U^*U = UU^* = I$
3. U сохраняет скалярное произведение для любых x , y ∈ V: (Ux,Uy)=(x,y)
4. U сохраняет длину |Ux|=|x|
5. U переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис.
6. U переводит хотя бы один ортонормированный базис в ортонормированный базис.

Матрица ортогонального оператора:

$$U_e = \begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots \lambda_n \end{pmatrix}$$ $A^\tau A = AA^\tau = I$.

Св-ва:

- Столбцы и строки ортогональной матрицы образуют системы ортонормированных векторов, то есть:

  $$\sum_i A_{ij}A_{ik} = \delta_{jk}$$
  и
  $$\sum_i A_{ji}A_{ki} = \delta_{jk}$$
  где $i \in \{1,\ \ldots,\ n\}$, n — порядок матрицы, а δ_{jk} — символ Кронекера.

Другими словами, скалярное произведение строки на саму себя равно 1, а на любую другую строку — 0. Так же и для столбцов.

- Определитель ортогональной матрицы равен ± 1, что следует из свойств определителей:

  $$1 = \det(I) = \det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)\det(A) = \det(A)^2 = 1.$$

- Множество ортогональных матриц порядка n над полем k образует группу по умножению, так называемую ортогональную группу которая обозначается $O_n(k)$ или $O(n,\ k)$
- Ортогональные матрицы соответствуют линейным операторам, переводящим ортонормированный базис линейного пространства в ортонормированный.
- Любая вещественная ортогональная матрица подобна блочно-диагональной матрице с блоками вида

  (± 1) и $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$

15. Характеристический многочлен линейного оператора. Собственные числа и собственные векторы.

]$\mathrm{A} \in L(V,V)$ - л.о.

Опр. Ненулевой вектор $x \in V$ наз. **собств.вектором** оператора А, если $\exists \lambda \in P: Ax = \lambda x$. λ - **собственное значение**

Опр. $|\mathrm{A} - \lambda I|$ - характеристический многочлен оператора A

уравнение $\det(\mathrm{A} - \lambda I) = 0$ - характеристическое уравнение оператора A

Теорема. λ - собственное значение $\Leftrightarrow$ λ -корень характеристического уравнения.

Следствие: $\forall$ линейный оператор имеет собственные значения.

Теорема. Характеристический многочлен подобных матриц совпадает.

16. Формализация понятия алгоритма(машины Тьюринга, нормальные алгоритмы Маркова). Алгоритмическая неразрешимость.

Опр. **Алгоритм** - это строгая и четкая конечная система правил, которая определяет последовательность действий над некоторыми объектами и после конечного числа шагов приводит к достижению поставленной цели.

Это интуитивное понятие, так как не известно, например, что есть “объект” $\Rightarrow$ Для формализации понятия алгоритма естественно начать с формализации понятия объекта. Можно считать, что алгоритм имеет дело не с объектами реального мира, а с изображениями этих объектов $\Rightarrow$ Объекты реального мира можно изображать словами в различных алфавитах.
Опр. Алфавит - конечная совокупность букв, буква - $\forall$ знак. Слово - $\forall$ конечная последовательность букв из алфавита.
$\Rightarrow$ ***Алгоритм*** - четкая конечная система правил для преобразования слов из некоторого алфавита в слова из этого же алфавита. Входные и выходные слова. Алгоритм может быть применим не ко всем словам из алфавита.
Формализованные действия над словами и порядок этих действий.
Машина Тьюринга(1936) - гипотетическая машина. Алгоритм - это то, что умеет делать эта машина. Если что-то не может быть сделано МТ, то это уже не алгоритм. С помощью МТ можно доказать $\exists$ или $\neg\exists$ алгоритмов решения различных задач. МТ - бесконечная лента, разделенная на ячейки, автомат, программа. В ячейке находится одна буква из алфавита. Автомат может двигаться вдоль ленты и по очереди обозревать содержимое ячеек. Он может находиться в одном из нескольких состояний $q_1,\ldots,q_k$. В зависимости от того, какую букву s_i автомат видит в состоянии q_j, то есть от пары (s_i, q_j) автомат может выполнить следующие действия:

- запись новой буквы в обозреваемую ячейку.
- сдвиг влево или вправо на одну ячейку.
- переход в новое состояние.

	Λ_i	s_1	$\cdots$	s_n
q_1				
$\vdots$			??	
q_k				

Задание для работы МТ можно изображать программой (процедурой?) Входным словом является слово, которое первым было на ленте. То, что получилось на ленте после останова - выходное слово. Если МТ не останавливается, то считается, что она не применима к данному входному слову. Применима $\Leftrightarrow$ если начав работу над входным словом она остановится.
Алгоритм - это то, что может быть реализовано МТ.
С помощью МТ можно строить различные композиции алгоритмов. Если алгоритмы А и В реализуются МТ, то можно реализовать например выполнение А, если появилось “да”, то выполнять В, иначе не выполнять. Тьюринг выдвинул тезис: “$\forall$ алгоритм может быть реализован соответствующей МТ.” Этот тезис есть формализованное определение алгоритма, доказать тезис нельзя, так как не определено понятие “$\forall$ алгоритм”.
Описываемый способ интерпретации работы МТ сам является алгоритмом. Ему соответствует некоторая МТ, в которой входное слово состоит из изображения программы и входного слова интерпретируемой машины. Такая МТ называется универсальной. После завершения работы универсальной МТ на ее ленте должно остаться то слово, которое получилось бы в результате работы интерпретируемой машины.
Нормальные алгоритмы Маркова (1954). Нет понятия ленты и подразумевается непосредственный доступ к $\forall$ частям преобразуемого слова. Эту схему он назвал нормальным алгоритмом.]A,B - слова в некотором алфавите. Нормальный алгоритм можно записать в следующем виде:

$A_1\left\{\begin{matrix}\to\\ \mapsto\end{matrix}\right\}B_1$

$A_2\left\{\begin{matrix}\to\\ \mapsto\end{matrix}\right\}B_2$ Каждая пара - формула подстановки для замены подслов в преобразуемом слове. Ищется

…………

$A_n\left\{\begin{matrix}\to\\ \mapsto\end{matrix}\right\}B_n$

вхождение слова A_1 в исходное слово. Если нашли, то заменяем его на B_1, если нет, то ищем A_2 и так далее. Затем возвращаемся в начало и снова ищем вхождение A_1. Процесс заканчивается, если ни одна из подстановок не применима, либо применилась завершающая формула, в которой $\mapsto$.
Доказано, что алгоритмические схемы Маркова и Тьюринга эквивалентны. Основная гипотеза Маркова: $\forall$ алгоритм нормализуем.
В теории алгоритмов известны задачи, для которых доказано, что для их решения $\neg\exists$ алгоритма. Такие задачи называются алгоритмически неразрешимыми. Проблема распознавания самоприменимости. ***Самоприменимые алгоритмы*** - это алгоритмы, которые, начав работу над собственным описанием останавливаются. Если же зацикливаются, то такой алгоритм называется несамоприменимым.
Задача найти общий алгоритм, который для $\forall$ алгоритма отвечал бы на вопрос, самоприменим ли он.
Докажем, что такой алгоритм $\neg\exists$.
Доказательство.]$\exists$ такой алгоритм A. P - $\forall$ алгоритм.
A(запись P)

$$\Rightarrow\begin{cases} C, & \text{если P самоприменим,}\\ H, & \text{если P несамоприменим.}\end{cases}$$

] B - алгоритм: увидев C- зацикливается, увидев H - останавливается.

	Λ	C	H
q_1	C,q_1	Λ ,q_1	!

- МТ.

Алгоритм B $\exists$, так как записали для него МТ. Если $\exists$ A и B, то $\exists$ K = AB, то есть алгоритм, который выполняет сначала A, а потом B.
Докажем, что K $\neg\exists$, доказав, что он не может быть ни самоприменимым, ни несамоприменимым.
Рассмотрим применение K к его собственной записи.
] K - самоприменим $\Rightarrow$ A(запись K) $\Rightarrow$C, но B зацикливается$\Rightarrow$K - несамоприменим.
] K - несамоприменим $\Rightarrow$ A(запись K) $\Rightarrow$H, и B останавливается$\Rightarrow$K - самоприменим.
$\Rightarrow$K $\neg\exists$, но B $\exists$ $\Rightarrow$ $\neg\exists$ A.

17. Структура и состав вычислительной системы (аппаратура + программное обеспечение)

Вычислительная система - Интеграция аппаратуры и ПО, построенная для решения некоторого класса задач.

Вычислительная система как иерархия уровней

1. Прикладной уровень
2. Уровень систем программирования
3. Управление виртуальными логическими ресурсами
4. Унификация доступа к ресурсам
5. Управление физическими ресурсами
6. Предоставляет стандартный способ доступа к физическим ресурсам.
7. Аппаратура
8. Набор доступных физических ресурсов, правила программного использования. Ограничения.

Виртуальный ресурс - ресурс, часть / все характеристики которого реализованы программно.

Программное обеспечение - совокупность программ, процедур и правил, а также документации, относящихся к функционированию системы обработки данных.
Виды:

- Системное: это комплекс программ, которые обеспечивают эффективное управление компонентами вычислительной системы, такими как процессор, оперативная память, каналы ввода-вывода, сетевое оборудование, выступая как «межслойный интерфейс» с одной стороны которого аппаратура, а с другой приложения пользователя. В отличие от прикладного программного обеспечения, системное не решает конкретные прикладные задачи, а лишь обеспечивает работу других программ, управляет аппаратными ресурсами вычислительной системы и т.д.
- Прикладное: Программа, предназначенная для выполнения определенных пользовательских задач и рассчитанная на непосредственное взаимодействие с пользователем.
- Инструментальное: программное обеспечение, предназначенное для использования в ходе проектирования, разработки и сопровождения программ, в отличие от прикладного и системного программного обеспечения.

По способу распространения и использования:

- несвободное/закрытое
- открытое
- свободное

Аппара́тное обеспече́ние — электронные и/или механические части вычислительного устройства, исключая его программное обеспечение и данные (информация, которую он хранит и обрабатывает).

18. Основные компоненты архитектуры ЭВМ (процессор, устройства памяти, внешние устройства)

Основные из традиционных принципов построения ЭВМ, сформулированные фон Нейманом, следующие:

- наличие единого вычислительного устройства, включающего процессор, средства передачи информации и память;
- линейная структура адресации памяти, состоящей из слов фиксированной длины;
- двоичная система исчисления;
- централизованное последовательное управление;
- хранимая программа;
- неотличимость данных от инструкций
- низкий уровень машинного языка;
- наличие команд условной и безусловной передачи управления;
- АЛУ с представлением чисел в форме с плавающей точкой.

В современных ЭВМ не обязательно выполняются все принципы Фон Неймана:

- Бывают ЭВМ с троичными системами счисления
- На некоторых мобильных платформах инструкции отличаются от данных
- Ввод/вывод производится не через АЛУ
- Более одного УУ, более одного АЛУ (или подобной аппаратуры)

Архитектура вычислительной машины—структура вычислительной машины, определяющая проведение обработки информации и включающая методы преобразования информации в данные и принципы взаимодействия технических средств и программного обеспечения.

Выделяют 2 основных узла ЭВМ: центральный процессор и память компьютера

В более подробное описание, определяющее конкретную архитектуру, также входят: структурная схема ЭВМ, средства и способы доступа к элементам этой структурной схемы, организация и разрядность интерфейсов ЭВМ, набор и доступность регистров, организация памяти и способы её адресации, набор и формат машинных команд процессора, способы представления и форматы данных, правила обработки прерываний.

Процессор, ОЗУ, видеоподсистема, дисковая система, периферийные устройства и устройства ввода-вывода.

19. Операционные системы, основные функции. Типы операционных систем.

Операционная система - программа управления ресурсами вычислительной системы. Существуют две группы **определений ОС**: «совокупность программ, управляющих оборудованием» и «совокупность программ, управляющих другими программами»

Принципиально, ОС не является необходимой частью вычислительной системы. Программное опеспечение вычислительной системы может само управлять ресурсами и не быть ОС.

ОС служат для управления ресурсами и выполнения прикладных программ.

Состав ОС:

- Ядро (монолитное / микроядро)
- Специальные программы - драйвера физических устройств, драйвера логических устройств
- Файловая система

Типы ОС:

- Пакетные. Программы выполняются последовательно.
- Разделения времени. Эмуляция выполнения нескольких программ одновременнно. Необходимые условия:
    - Наличие защищенного режима
    - Прерывания
    - Защита памяти
- Реального времени
- Сетевые ОС - пользователи могут получить доступ к ресурсам другого сетевого компьютера, только они должны знать об их наличии и уметь это сделать.
- Распределенная система - внешне выглядит как обычная автономная система, однако управляет более чем одной вычислительной системой.

Функции ОС (в зависимости от типа - свои функции):

- Интерфейс для прикладных программ
- Организация очереди из заданий в памяти и выделение процессора одному из заданий потребовало планирования использования процессора.
- Переключение с одного задания на другое требует сохранения содержимого регистров и структур данных, необходимых для выполнения задания, иначе говоря, контекста для обеспечения правильного продолжения вычислений.
- Поскольку память является ограниченным ресурсом, нужны стратегии управления памятью, то есть требуется упорядочить процессы размещения, замещения и выборки информации из памяти.
- Организация хранения информации на внешних носителях в виде файлов и обеспечение доступа к конкретному файлу только определенным категориям пользователей.
- Поскольку программам может потребоваться произвести санкционированный обмен данными, необходимо их обеспечить средствами коммуникации.
- Для корректного обмена данными необходимо разрешать конфликтные ситуации, возникающие при работе с различными ресурсами и предусмотреть координацию программами своих действий, т.е. снабдить систему средствами синхронизации.

20. Парадигмы программирования (функциональное, императивное, объектно-ориентированное)

Парадигма программирования - семейство обозначений, рекомендаций и идей, определяющих общий способ (методику) реализации программ.

1. **Функциональная парадигма** - процесс вычисления как получение значения (результата) математически описанной функции. Комбинация вызовов функций того же или более низкого уровня. Каждая следующая функция в этой комбинации описывается аналогичным образом, до тех пор, пока описание не сведётся к предопределённым функциям, вычисление которых считается заданным. Вычисление функции не имеет побочного эффекта кроме возвращеня результата.

Пример вычисления факториала: главная_функция (входное_число) = умножить(входное_чило , главная функция (минус (входное_число , 1)))

Императивная парадигма - процесс вычисления в виде инструкций, изменяющих состояние программы. Последовательность команд, которые должен выполнить компьютер.

Пример: a = 1, c = a + входное_число, вывод c

Объектно-ориентированная парадигма – парадигма, в которой основными концепциями являются понятия объектов и классов.

Класс — это тип, набор методов и свойств. Класс можно сравнить с чертежом, согласно которому создаются объекты. **Программа** - набор классов**. Выполнение программы** - взаимодействие множества объектов (экземпляров классов) с помощью обмена сообщениями.

Принципы:

- Абстракция - Объекты представляют собою упрощенное, идеализированное описание реальных сущностей предметной области
- Инкапсуляция - класс - черный ящик, он скрывает детали своей реализации. Известен лишь интерфейс, способ работы с ним (методы и свойства).
- Наследование - порождение нового класса от другого с сохранением/изменением свойств и методов класса-предка
- Полиморфизм - один и тот же программный код выполняется по-разному в зависимости от того, объект какого класса используется при вызове данного кода

Концепции:

- Система состоит из объектов
- Объекты некоторым образом взаимодействуют между собой
- Каждый объект характеризуется своим состоянием и поведением
- Состояние объекта задаётся значением полей данных
- Поведение объекта задаётся методами

Пример:

класс Main { поле-типа-A м, метод main (м = новый объект класса A; м.Изменить())}

класс A { поле-число x, поле-число y, метод Изменить (x = 1)}

21.Базы данных. Основные понятия реляционной модели данных. Реляционная алгебра. Средства языка запросов SQL.

БД- набор любых систематизированных данных, согласованных между собой.
СУБД осуществляет управление БД – программная система, ориентированная на поддержку хранения, манипулирования и упр.данными, обеспечивая их целостность и безопасность.
Модель данных определяет способ организации информации в БД(связи между элементами).
Реляционный подход к организации БД базируется на понятии отношения.
Основные понятия в БД:
Тип данных – символы, числа, строки.
Домен – именованное мн-во атомарных(не имеющих деления на более мелкие значения) значений одного и того же типа
Атрибут способен принимать значения из некоторого домена, каждый атрибут определен на единственном домене.
Кортеж мн-во пар вида {имя атрибута, значение}
Первичный ключ
Отношение – мн-во кортежей, соотв. одной схеме отношения.
Реляционная модель данных – формальная теория, лежащая в основе рел.систем(теория мн-в + логика). Она описывает некоторый набор основных понятий и признаков, которыми должны обладать все СУБД и упр. ими БД, основ. на этой модели.

1. Структура данных
2. Целостность данных
3. Обработка данных.

Реляционная алгебра
Теоретико-множественные операции(ассоциативны и коммуникативны):

- **объединения отношений,**
- **пересечения отношений,**
- **вычитания отношений,**
- **прямого произведения отношений.**

Спец. реляц.операции:

- **ограничения отношения,**
- **проекции отношения,**
- **соединения отношений,**
- **деления отношений.**

+ операция присваивания и переименование атрибутов.

SQL — универсальный компьютерный язык, применяемый для создания, модификации и управления данными в реляционных базах данных.

SQL основывается на реляционной алгебре.

Язык SQL представляет собой совокупность

- операторов;
- инструкций;
- и вычисляемых функций.

Операторы

Согласно общепринятому стилю программирования, операторы (и другие зарезервированные слова) в SQL всегда следует писать прописными буквами.

Операторы SQL делятся на:

- операторы определения данных (*Data Definition Language, DDL*)
    - **CREATE** создает объект БД (саму базу, таблицу, представление, пользователя и т. д.)
    - **ALTER** изменяет объект
    - **DROP** удаляет объект
- операторы манипуляции данными (*Data Manipulation Language, DML*)
    - **SELECT** считывает данные, удовлетворяющие заданным условиям
    - **INSERT** добавляет новые данные
    - **UPDATE** изменяет существующие данные
    - **DELETE** удаляет данные
- операторы определения доступа к данным (*Data Control Language, DCL*)
    - **GRANT** предоставляет пользователю (группе) разрешения на определенные операции с объектом
    - **REVOKE** отзывает ранее выданные разрешения
    - **DENY** задает запрет, имеющий приоритет над разрешением
- операторы управления транзакциями (*Transaction Control Language, TCL*)
    - **COMMIT** применяет транзакцию.
    - **ROLLBACK** откатывает все изменения, сделанные в контексте текущей транзакции.
    - **SAVEPOINT** делит транзакцию на более мелкие участки.

22. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и системы. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского.

Систему ОДУ можно записать в нормальной форме $\vec{y}' = \vec{G}(x, \vec{y})$.

Линейные диф.ур. $\vec{y}' = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x)$.

2. Линейным обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$A_0(x)y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(x)y' + A_n(x)y = F(x).$$

Определение. Фундаментальной системой решений однородного векторного уравнения $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ называются любые n линейно независимых на (α, β) его решений $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ (т.е. любой базис в n-мерном пространстве его решений).

Определение. Пусть $k \times k$ – матрица $V(x)$ составлена из векторов-столбцов $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_k(x)$. Определитель $W(x) \equiv W[\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_k(x)] \equiv \det V(x)$ называется определителем Вронского системы этих векторов.

Теорема. Либо решения $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ векторного уравнения $\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x)$ с непрерывной $n \times n$- матрицей $A(x)$ линейно зависимы на (α, β), и тогда $W[\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n] \equiv 0$ на (α, β); либо решения $\vec{y}_1(x), \ldots, \vec{y}_n(x)$ этого уравнения линейно независимы на (α, β), и тогда $W[\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n] \neq 0$ ни в одной точке интервала (α, β). В последнем случае матрица $V(x)$, составленная из векторов-столбцов $\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n$, является фундаментальной матрицей.

23. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка,разрешенного относительно производной.

Пусть функция $f(t,y)$ определена и непрерывна в прямоугольнике

$$\Pi = \{(t,y): \quad |t-t_0| \leqslant T, \quad |y-y_0| \leqslant A\}.$$

Рассмотрим на отрезке $[t_0 - T, t_0 + T]$ дифференциальное уравнение

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{2.1}$$

с условием

$$y(t_0) = y_0. \tag{2.2}$$

Требуется определить функцию $y(t)$, удовлетворяющую уравнению (2.1) и условию (2.2). Эта задача называется задачей с начальным условием или задачей Коши.

Рассмотрим отрезок $[t_1, t_2]$ такой, что $t_0 - T \leqslant t_1 < t_2 \leqslant t_0 + T$, $t_0 \subset [t_1, t_2]$.

Определение 2.1.1. *Функция $\bar{y}(t)$ называется решением задачи Коши (2.1), (2.2) на отрезке $[t_1, t_2]$, если: $\bar{y}(t) \in C^1[t_1, t_2]$, $|\bar{y}(t) - y_0| \leqslant A$ для $t \in [t_1, t_2]$, $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.1) для $t \in [t_1, t_2]$ и условию (2.2).*

Гронуолла-Беллмана.

Лемма 2.1.2. *Пусть функция $z(t) \in C[a,b]$ и такова, что*

$$0 \leqslant z(t) \leqslant c + d\left|\int\limits_{t_0}^{t} z(\tau)d\tau\right|, \quad t \in [a,b], \tag{2.5}$$

где постоянная c неотрицательна, постоянная d положительна, а t_0 – произвольное фиксированное число на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$z(t) \leqslant ce^{d|t-t_0|}, \quad t \in [a,b]. \tag{2.6}$$

Сформулируем теперь важное для дальнейших исследований условие Липшица.

Определение 2.1.2. *Функция $f(t,y)$, заданная в прямоугольнике Π, удовлетворяет в Π условию Липшица по y, если*

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \quad \forall (t,y_1),(t,y_2) \in \Pi,$$

где L – положительная постоянная.

Докажем теперь теорему единственности решения задачи Коши (2.1), (2.2).

Теорема 2.1.1. *Пусть функция $f(t,y)$ непрерывна в Π и удовлетворяет в Π условию Липшица по y. Если $y_1(t)$, $y_2(t)$ – решения задачи Коши (2.1), (2.2) на отрезке $[t_1, t_2]$, то $y_1(t) = y_2(t)$ для $t \in [t_1, t_2]$.*

24. Функции алгебры логики. Реализация их формулами. Совершенная Д.Н.Ф.

Функции от переменных $x_1,\dots,x_n$ со значениями из $\{0,1\}$ обозначим $f(x_1,\dots,x_n)$.

Их всего $P_2(n)=2^{2^n}$

Определение. В $f(x_1,\dots,x_n)$, x_j называется **существенной**, если $\exists \alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n$:

$f(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n)\neq f(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n)$

И **фиктивной**, если $\forall \alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n \Rightarrow f(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},0,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n)= f(\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},1,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_n)$

Операции над ф.а.л. – Добавление и удаление фиктивных переменных

Определение. Ф.а.л. называются **равными**, если они переводятся одна в другую добавлением или отбрасыванием фиктивных переменных.

Определение. **Формула над F.** (индуктивное определение)

$F=\{f_1(x_1,\dots,x_{n_1}),\dots,f_s(x_1,\dots,x_{n_s}),\dots\}$

1) f_i - формула над F. (базис)
2) Если каждый из объектов $A_1,\dots,A_{k_i}$ либо формула над F, либо переменная, то $f_i(A_1,\dots,A_{k_i})$ - формула над F.

Определение. Две формулы называются **эквивалентными,** если они реализуют равные функции.

Значение формулы.

1) $f_i(x_1,\dots,x_{k_i})\big|_{\substack{x_1=\alpha_1\\ \dots \\ x_n=\alpha_n}} = f_i(\alpha_1,\dots,\alpha_{k_i})$
2) $A_1|_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}=\beta_1,\dots,A_n|_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}=\beta_n \Rightarrow F_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}=f_i(\beta_{1_i},\dots,\beta_{n_i})$

$x^\sigma=\begin{cases} x, \sigma=1\\ \bar{x}, \sigma=0\end{cases}$; $x_1^{\sigma_1},\dots,x_n^{\sigma_n}=1$ на 1-м наборе $(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$

Теорема(разложение по переменным)

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ -ф.а.л. Тогда $1\le k\le n$ $\quad f(x_1,\dots,x_n)=\bigvee\limits_{(\sigma_1,\dots,\sigma_k)} x_1^{\sigma_1}\dots x_k^{\sigma_k} f(\sigma_1,\dots,\sigma_k,x_{k+1},\dots,x_n)$

(V берем по всевозможным $x_1,\dots,x_k$)

Следствие 1 (разложение функции по одной переменной).

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\bar{x}_1 \,\&\, f(0,x_2,\dots,x_n)\vee x_1 \,\&\, f(1,x_2,\dots,x_n).$$

Следствие 2 (разложение функции в совершенную дизъюнктивную нормальную форму). Любая функция алгебры логики $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, тождественно не равная нулю[1], может быть представлена в следующем виде:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\bigvee_{\substack{(\sigma_1,\dots,\sigma_n),\\ f(\sigma_1,\dots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1}\,\&\dots\&\, x_n^{\sigma_n}.$$

(правая часть последнего соотношения называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой).

Определение. Система функций P называется полной в P_2 тогда и только тогда, когда любая функция алгебры логики может быть реализована формулой над P.

Теорема. Система функций $\{\bar{x}, x\&y, x\vee y\}$ является полной в P_2.

25. Схемы из функциональных элементов и простейшие алгоритмы их синтеза. Оценка сложности схем, получаемых по методу Шеннона.

Определение. *Графом G* называется любая пара (V, E), где $V = \{v_1, v_2, ...\}$ — множество элементов любой природы, а $E = \{e_1, e_2, ...\}$ — семейство пар элементов из V, причем допускаются пары вида (v_i, v_i) и одинаковые пары. Если пары в V рассматриваются как пары неупорядоченных элементов, то граф называется *неориентированным*, если же как пары упорядоченных элементов, то граф называется *ориентированным* (*орграфом*).

Определение. *Ориентированным ациклическим графом* называется любой ориентированный граф, в котором нет ориентированных циклов.

Определение. *Схемой из функциональных элементов (СФЭ) над базисом Б* называется ориентированный ациклический упорядоченный граф Σ, вершины которого помечены следующим образом:

1) каждый исток Σ помечен символом некоторой переменной из X, причем различные истоки помечены символами различных переменных;

2) каждая отличная от истока вершина v схемы Σ помечена символом некоторой функции φ_i из множества $Б$ и при этом $k_i = d^+(v)$ (такая вершина с приписанным символом φ_i представляет *функциональный элемент* (ФЭ) E_i с k_i входами и одним выходом, для наглядности такие ФЭ будем изображать в виде треугольников с записанным внутри них символом φ_i, как на рис. 1);

3) некоторые вершины Σ помечены символами переменных из Z так, что одной и той же вершине может быть сопоставлено несколько переменных из Z, но разным вершинам не может быть сопоставлена одна и та же переменная. При этом входные (выходные) переменные, которые приписаны каким-либо вершинам Σ, считаются входными (соответственно, выходными) переменными Σ, а те вершины, которым они сопоставлены, — входами (соответственно, выходами) СФЭ Σ.

Система ФАЛ Q_n из P_2^n такая, что при всех i, $i = 0, 1, 2,..., 2^n - 1$, справедливо равенство:

$$Q_n[i] = x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n}, \qquad (1)$$

где $\sigma = (\sigma_1,..., \sigma_n) \in E_2^n$ и $|\sigma|=i$, называется (функциональным) *дешифратором* порядка n. Это связано с тем, что на любом наборе α, $\alpha \in E_2^n$, значений переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ ровно одна из ФАЛ системы Q_n — ФАЛ с номером $|\alpha|$ — обращается в 1.

Функция M_n от (входных) переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_0, y_1,..., y_{2^n-1}$ такая, что при всех α, $\alpha \in E_2^n$, и β, $\beta \in E_2^{2^n}$, имеет место равенство: $M_n(\alpha,\beta) = \beta[i]$, где $i=|\alpha|$, называется (функциональным) *мультиплексором*

Перейдем к рассмотрению метода Шеннона для синтеза СФЭ. Идея метода заключается в построении СФЭ для произвольной функции n переменных с помощью мультиплексора порядка k и универсального многополюсника порядка $n-k$. Метод составляет содержание доказательства следующей теоремы.

Теорема. Для любой ФАЛ $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно построить СФЭ Σ_f, которая реализует f и для которой $L(\Sigma_f) \le 6 \cdot \frac{2^n}{n} + O\left(\frac{2^n \cdot \log_2 n}{n^2}\right)$.

Проблема синтеза СФЭ: ***по данной функции f построить схему*** Σ***, ее реализующую.***

Алгоритмы синтеза.

1) По совершенной ДНФ.

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1,\ldots,\sigma_n):\\ f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$$

2) По реализации множества всех конъюнкций

Пусть Σ^n ***- множество всех*** $\{x_1^{\sigma_1},\ldots, x_n^{\sigma_n}\}$

$$L(\Sigma^1) = 1$$

$$L(\Sigma^n) = L(\Sigma^{n-1}) + 1 + 2^n = 2\cdot 2^n + n - 4$$

S – количество V в с. д.н.ф. $S \le 2^n - 1$

$$\Rightarrow L \le 3\cdot 2^n + n - 5$$

2) Разложение по 1-ой переменной

$$f(x_1,\ldots, x_n) = x_n \;\&\; f(x_1,\ldots, x_{n-1},1) \vee \overline{x_n} \;\&\; f(x_1,\ldots, x_{n-1},0) = x_n f' \vee x_n f''$$

$$L \le 3\cdot 2^n - 4$$

Определение. ***Универсальный мн-к – СФЭ с n входами и s выходами и*** $\forall i = \overline{1,n} \Rightarrow \exists \tau(i) \sim f_i(x_1,\ldots, x_n)$ ***- выход (***2^{2^n} ***выходов).***

26. Вероятностное пространство. случайные величины. закон больших чисел в форме Чебышева

Вероятностное пространство - это тройка (Ω, ***A***, P), где

Ω = {ω} — **пространство элементарных событий (исходов)** - непустое множество, элементы ω которого интерпретируются как взаимно исключающие исходы изучаемого случайного явления;

A — **набор подмножеств** множества Ω, называемых событиями. ***A*** является σ-алгеброй, т.е. Ω∈***A***, если A1∈***A*** ⇒ $\overline{A1}$∈***A***, ∀A1A2,...∈A ⇒ ∪i=1,∞ Ai∈A;

P **вероятность** — функция, определенная на ***A*** и удовлетворяющая следующим условиям:

1) P (A) >=0 ∀A∈***A***;
2) P (Ω) =1
3) P (∪i=1,∞Ai) =∑i=1,∞ P(Ai), если AiAj =∅ при i≠j

⇔ 3а) P (A+B) =P(A)+P(B), AB=∅

3б) ∀A1⊃A2⊃...⊃An⊃..., ∩∞Ai=∅ ⇒ n→∞lim P(An)=0

Примеры:

1) Пусть Ω=(ω1, ..., ωs), A={ ωi1, ...,ωik}—всевозможные подмножества множества Ω
P(ω1)=...=P(ωs)=1/s ⇒ P(A)=| A | / | Ω | —классическое опр. вероятности
2) Пусть Ω — множество в n-мерном евклидовом пространстве, объём μ(Ω) которого >0 и конечен. σ- алгебра ***A*** состоит из всех измеримых (т.е. имеющих объём) подмножеств A⊂Ω.
P(A)=μ(A)/ μ(Ω), A∈Ω — геометрическое определение вероятности.

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, ***A***, P).

Случайной величиной называется действительная функция от элементарного события ξ=ξ(ω), ω∈Ω, для которой при ∀ действительных x множество {ω: ξ(ω)<x} принадлежит ***A*** (т.е. является событием) и для него определена вероятность P{ω: ξ(ω)<x} или P{ξ<x}. Эта вероятность, рассматриваемая как функция x, называется **функцией распределения** случайной величины ξ и обозначают Fξ(x). С помощью Fξ(x) можно однозначно определить P(ξ∈B) для борелевских множеств на числовой прямой. P(ξ∈B) как функция B называется **распределением вероятностей случайной величины** ξ.

Примеры:

Если pξ(x) >= 0 ∀ x:

1) <u>абсолютно непрерывные распределения</u>:

P{ξ∈B}= $\int_B p_\xi(x)dx$, где p(x) - плотность вероятности

2) <u>дискретные распределения</u> - задаются конечным или счетным набором вероятностей P{ξ=xK}: $\sum_k P\{\xi = xK\} = 1, \quad F_\xi(x) = \sum_{k:xK \le x} P\{\xi = xK\}$

<u>Свойства</u>:

1) lim x->∞ Fξ(x) = 1
2) lim x->-∞ Fξ(x) = lim x->-∞ P(ξ<x) = 0
3) Fξ(x) - неубывающая функция
4) Fξ(x) односторонне непрерывна (слева, если Fξ(x)=P(ξ<x)) lim x->x0- F(x) = F(x0)

Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число Mξ = $\int_\Omega \xi(\omega)P(d\omega)$, если **интеграл Лебега** ∃ . Если ξ имеет плотность, то Mξ = $\int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)dx$. Если ξ - дискретна, то Mξ = $\sum_k xKP\{\xi = xK\}$, если ряд сходится абсолютно. В общем случае Mξ = $\int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x)$.

Дисперсией случайной величины ξ называется число Dξ = M$(\xi - M\xi)^2$={определение математического ожидания}=$M\xi^2 - (M\xi)^2$

<u>Неравенство Чебышева</u>

$\forall\xi: D\xi<\infty, \forall\varsigma \qquad P\{|\xi - M\xi| \geq \varsigma\} \leq \frac{D\xi}{\varsigma^2}$

Теорема Чебышева (Закон больших чисел)

Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ - последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной C: $D\xi_1 \leq C$, $D\xi_2 \leq C, \ldots$, $D\xi_n \leq C$, тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \lim_{n\to\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k| < \varepsilon\} = 1.$$

Свойства вероятности (из определения):

1) Если $A\subseteq B$, то $P(B\backslash A) = P(B) - P(A)$

   Т.к. $B=A+(B\backslash A)$, $A\cap(B\backslash A) = 0$ => $P(B) = P(A) + P(B\backslash A)$

   Аналогично $A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\supseteq\ldots\supseteq A_n\supseteq\ldots$ и $\cap n=1,\infty\ A_n = 0$ => $\lim P(A_n)=0$
2) Если $A\subseteq B$, то $P(A) <= P(B)$
3) $A\in\mathbf{A}$ => $0<=P(A)<=1$
4) $P(\overline{A})=1-P(A)$
5) $P(\varnothing)=0$

Примеры распределений:

1) $P(\xi=a) = 1$ Бернулли
2) $P(\xi=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0, \infty$ Пуассона
3) $p(x)=1/(b-a)$ на $[a, b]$ Равномерное
4) $p(x)= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ Нормальное (m, σ)

Свойства математического ожидания.

1. Если $X(\omega)$ = const = c, то EX = c
2. $E(c_1X+c_2Y) = c_1EX + c_2EY$, где X и Y – случайные величины.

Будем в дальнейшем вместо $X(\omega)$ писать просто X.

Свойства дисперсии.

1. $DX = EX^2 - (EX)^2$
2. Если X=c, то Dc = 0
3. $D(cX) = c^2 DX$

Определение. Случайные величины $X(\omega)$, $Y(\omega)$ называются независимыми, если для любых борелевских множеств B_1 и B_2

$P(X(\omega)\in B_1, Y(\omega)\in B_2) = P(X(\omega)\in B_1)P(Y(\omega)\in B_2)$.

Центральная предельная теорема

Теорема. Если случайные величины $X_1, X_2, \ldots$, одинаково распределены и имеют конечные $EX_i = a$ и $DX_i = \sigma^2$, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X_1+\ldots+X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

27. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол

Задача численного интегрирования: Вычислить определенный интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

основная формула интегрального исчисления позволяется выразить интеграл через первообразную. Но на практике не применимо, слишком громоздко, поэтому заменяют более простыми.

Удобным аппаратом построения квадратур с заранее заданными узлами x_i является аппарат интерполирования. Пусть, например, заданы n различных узлов x_i на отрезке $[a,b]$. Заменим f на интерполяционный многочлен Лагранжа степени $n-1$ $L_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$. Положим

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + R(f), \text{ где } R(f) = \int_a^b (f(x) - L_n(x))dx$$

– остаточный член. Можно вместо интерполяционного многочлена Лагранжа взять интерполяционный многочлен Эрмита, и тогда в квадратуру войдут наряду со значениями функции $f(x_i)$ ещё и значения её производных.

1) Формула прямоугольников

Заменим функцию интерполяционным многочленом нулевой степени, построенным по значению ф. в средней точке отрезка $L_1(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. Тогда формула прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R(f).$$

основание *высоту

1) **Формула трапеций**

Заменим ф. интерполяционным многочленом первой степени, постр. по знач. в т. $x_1 = a$ и $x_2 = b$.

При этом кривую y=f(x) заменяем хордой, соед.эти точки $L_2(x) = f(a)\frac{x-b}{a-b} + f(b)\frac{x-a}{b-a}$.Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)) + R(f).$$

формула трапеций

2) **Формула Симпсона (парабол)**

Заменим функцию f на отрезке $[a,b]$ интерполяционным многочленом второй степени, построенным по узлам $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$, $x_3 = b$. Такой многочлен имеет вид

$$L_3(x) = f(a)\frac{(x-x_2)(x-b)}{(a-x_2)(a-b)} + f(x_2)\frac{(x-a)(x-b)}{(x_2-a)(x_2-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-x_2)}{(b-a)(b-x_2)}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \cdot (f(a) + 4f(x_2) + f(b)) + R(f).$$

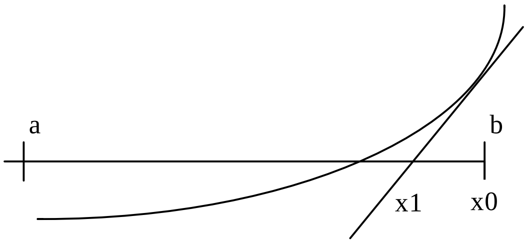
28. Методы Ньютона и секущих для решения нелинейных уравнений.

Для решения нелинейных уравнений f(x)=0 применяют итерационные методы. Если известна достаточно малая окрестность, в которой содержится единственный корень x*, то в этой окрестности выбирают приближение x0. С помощью рекуррентного соотношения строят последовательность точек Xк, сходящуюся к x*.

1. Метод Ньютона

Опр. Корень c называется *изолированным* на сегменте $[a,b]$, если c - внутренняя точка $[a,b]$ и других корней на $[a,b]$ нет.

Пусть надо найти корень уравнения $f(x)=0$, изолированный на сегменте $[a,b]$.
Пусть x_0 - первое приближение. В методе Ньютона ф. аппроксимируют касательной к ее графику в т. (Xk, f(Xk)), Xk –некоторое приближение к корню.

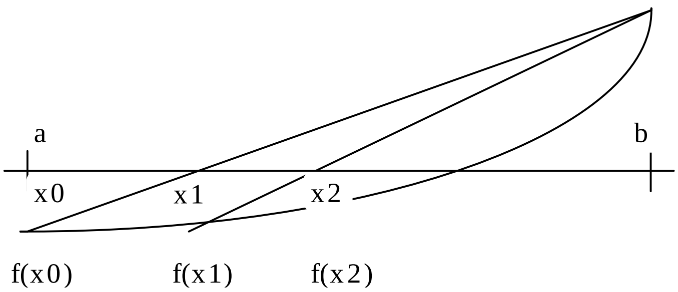


Проводя касательные построим
последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_N, \ldots$ точек пересечения касательных с осью Ox.
Значения x_N получаются по формуле:
$x_{N+1} = x_N - f(x_N) / f'(x_N)$ т.к. уравнение касательной в т x_N: $y = f'(x_N)(x - x_N) + f(x_N)$

2. Метод Хорд(секущих)

Уравнение хорды (секущей), проходящей через точки $(x_N, f(x_N))$ и $(b, f(b))$: $\dfrac{y - f(x_N)}{f(b) - f(x_N)} = \dfrac{x - x_N}{b - x_N}$

Т.о. значения x_N (т. пересечения хорд с осью Ox) получаются по формуле:



$$\frac{0 - f(x_N)}{f(b) - f(x_N)} = \frac{x - x_N}{b - x_N} \Rightarrow x_{N+1} = x_N - \frac{b - x_N}{f(b) - f(x_N)} f(x_N)$$

Опр. Последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_N, \ldots$ будем называть **итерационной**, если $\forall x_N$ выражается по рекурсивной формуле $x_N = F(x_{N-1})(x_{N+1} = F(x_N))$, а в качестве x_0 взято $\forall$ число из области определения $F(x)$.

29.Численное решение задачи Коши для ОДУ Примеры методов Рунге-Кутта.

Рассмотрим задачу Коши для ОДУ:

$$\frac{dU(t)}{dt} = f(t,u), t > 0, U(0) = U_0$$

Пусть $D = \{|t| \le a, |U - U_t'| \le b\}, f(t,U)$ непрерывна по t и в D $|f| \le M$. В D f удовлетворяет условию Липшица по U:

$$|f(t,U') - f(t,U'')| \le L|U' - U''|.$$

$\Rightarrow \exists!$ решение при $|t| \le t_c = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$

При исследовании численными методами решения задачи Коши будем предполагать, что решение $\exists!$ и обладает необходимыми свойствами гладкости.

Определение

1. $w_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0,1,2,\dots\}$ - **равномерная сетка с шагом** $\tau > 0$.

   Обозначение $y_n = y_n(t_n)$ - приближенное решение (сеточная функция)
2. Фиксируем t и построим последовательность сеток $w_\tau : \tau \to 0$ и $t_n = n\tau = t$. **Метод сходится в точке *t***, если $|y_n - U(t_n)| \to 0$ при $\tau \to 0, t_n = t$.
3. **Метод сходится на** $(0,T]$, если он сходится в $\forall$ точке $t \in (0,T]$
4. Метод имеет *p*-й порядок точности, если $\exists p > 0 : |y_n - U(t_n)| = O(\tau^p), \tau \to 0$.
5. $z_n = y_n - U(t_n)$ - **погрешность метода**.

1. Метод Эйлера.

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} - f(t_n, y_n) = 0, n = 0,1,2,\dots, y_0 = U_0 \Rightarrow y_{n+1} = \tau f(t_n, y_n) + y_n, n = 0,1,\dots, y_0 = U_0$$

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{\tau} = f(y_n + t_n, U_n + z_n) - \frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = \psi_n^{(1)} - \psi_n^{(2)}$$

$\psi_n^{(1)} = -\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} + f(t_n, U_n)$ - невязка или погрешность аппроксимации разностного уравнения

$\psi_n^{(2)} = f(y_n + t_n, U_n + z_n) - f(t_n, U_n)$

6. Разностный метод аппроксимирует исходное дифференциальное уравнение, если $\psi_n^{(1)} \to 0$ при $\tau \to 0$.
7. Разностный метод имеет p - й порядок аппроксимации, если $\psi_n^{(1)} = O(\tau^p)$.

т.к. $\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = U'(t_n) + O(\tau^p)$, то $\psi_n^{(1)} = -U'(t_n) - f(t_n, U_n) + O(\tau) = O(\tau)$, т.е. метод Эйлера имеет 1-й порядок аппроксимации.

2. Симметричная схема.

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right) = 0; n = 0,1,\dots \quad y_0 = U_0$$

$\Rightarrow y_{n+1} = F_n + 0.5\tau f(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad F_n = y_n + 0.5\tau f(t_n, y_n)$ - неявный метод.

$$\Psi_n^{(1)} = -\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} + \frac{1}{2}\left(f(t_n, U_n) + f(t_{n+1}, U_{n+1})\right) =$$

$= -U_n' - \frac{\tau}{2}U_n'' + O(\tau^2) + \frac{1}{2}(U_n' + U_{n+1}') \quad -U_n' - \frac{\tau}{2}U_n'' + \frac{1}{2}(U_n' + U_n' + \tau U_n'' + O(\tau^2)) = O(\tau^2)$, т.е. имеет 2-й порядок аппроксимации.

3. Методы Рунге-Кутта.

Явный m-этапный метод Рунге-Кутта:

Пусть $y_n = y(t_n)$ известны, задаются a_i и b_{ij}, $i = 2,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,m-1;\ \sigma_i,\ i = 1,2,\ldots,m$
и последовательно вычисляются функции:

$$\Re_1 = f(t_n, y_n),\ \Re_2 = f(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau\Re_1),\ \Re_3 = f(t_n + a_3\tau, y_n + b_{31}\tau\Re_1 + b_{32}\tau\Re_2);\ldots$$

$$\Re_m = f(t_n + a_m\tau, y_n + b_{m1}\tau\Re_1 + b_{m2}\tau\Re_2 + \ldots + b_{m,m-1}\tau\Re_m)$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sum_{i=1}^{m}\sigma_i\Re_i,\ldots \Rightarrow y_{n+1} = y_n + \tau\sum_{i=1}^{m}\sigma_i\Re_i\ldots;\sum_{i=1}^{m}\sigma_i = 1$$

При $m = 1 \Rightarrow$ схема Эйлера

При $m = 2 \Rightarrow\ \Re_1 = f(t_n, y_n),\ \Re_2 = f(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau\Re_1),$

$$y_{n+1} = y_n + \tau(\sigma_1\Re_1 + \sigma_2\Re_2)$$

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \sigma_1 f(t_n, y_n) + \sigma_2 f(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau f(t_n, y_n))$$

$$\psi_n^{(1)} = -\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} + \sigma_1 f(t_n, U_n) + \sigma_2 f(t_n + a_2\tau, y_n + b_{21}\tau f(t_n, U_n))$$

$$\frac{U_{n+1} - U_n}{\tau} = U'(t_n) + \frac{\tau}{2}U''(t_n) + O(\tau^2)$$

$$f(t_n + a_2\tau, U_n + b_{21}\tau f_n) = f_n + a_2\tau\frac{\partial f_n}{\partial t} + b_{21}\tau f_n\frac{\partial f_n}{\partial U} + O(\tau^2)$$

$$U'' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial U}U' = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial U}f \Rightarrow$$

$$\psi_n^{(1)} = -U'(t_n) + (\sigma_1 + \sigma_2)f_n + \tau\left[(\sigma_2 b_{21} - 0.5)f_n\frac{\partial f_n}{\partial U} + (\sigma_2 a_2 - 0.5)\frac{\partial f_n}{\partial t}\right] + O(\tau^2).$$

Если $\sigma_1 + \sigma_2 = 1,$ то имеем 1-ый порядок аппроксимации.

Если еще $\sigma_2 a_2 + \sigma_2 b_{21} = 0.5 \Rightarrow$ 2-ой порядок аппроксимации.

Получили схему метода Рунге-Кутта 2-ого порядка:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = (1-\sigma)f(t_n, y_n) + \sigma f(t_n + a\tau, y_n + a\tau f(t_n, y_n)),\ \sigma a = 0.5$$

При $\sigma = 1;\ a = 0.5 \Rightarrow \dfrac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f\left(t_n + \dfrac{\tau}{2}, y_n + \dfrac{\tau}{2}f_n\right)$

При $\sigma = 0.5;\ a = 1 \Rightarrow \Re_1 = f(t_n, y_n), \Re_2 = f(t_n + \tau, y_n + \tau\Re_1),\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{\tau}{2}(\Re_1 + \Re_2).$

Метод 3- его порядка:

$$\Re_1 = f(t_n, y_n),\ \Re_2 = f\left(t_n + \frac{\tau}{2}, y_n + \frac{\tau}{2}\Re_1\right),\ \Re_3 = f(t_n + \tau, y_n - \tau\Re_1 + 2\tau\Re_2),\ \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = \frac{1}{6}(\Re_1 + 4\Re_2 + \Re_3)$$

4-ого порядка: $\Re_1 = f(t_n, y_n),\ \Re_2 = f\left(t_n + \dfrac{\tau}{2}, y_n + \dfrac{\tau}{2}\Re_1\right),\ \Re_3 = f\left(t_n + \dfrac{\tau}{2}, y_n + \dfrac{\tau}{2}\Re_2\right),$

$$\Re_4 = f(t_n + \tau, y_n + \tau\Re_3).$$

30. Задача Коши для уравнения колебания струны. формула Даламбера

$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} (*)$ Уравнение характеристики: $dx^2 - a^2 dt^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} dx - adt = 0 \\ dx + adt = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x - at = C1 \\ x + at = C2 \end{cases}$ Сделаем замену переменных: $\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases} \Rightarrow u_{\xi\eta} = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}; \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2})$$

$\forall$ решение $u_\eta(\xi,\eta) = f^*(\eta) \quad \Rightarrow u(\xi,\eta) = \int f^*(\eta)d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta) (**)$

Т.о. $\forall$ решение уравнения $u_{\xi\eta} = 0$ м.б. представлено в виде (**), т.е. есть функции $f_1, f_2 \Rightarrow (**)$ - общий интеграл уравнения $u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow$ Найдем функции f_1, f_2:

$$\begin{cases} u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) \\ u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x) \end{cases} \Rightarrow f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha + C \Rightarrow$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha + \frac{C}{2}; \quad f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\alpha)d\alpha - \frac{C}{2} \Rightarrow$$

$$u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}[\int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha)d\alpha] =$$

$\dfrac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha$ - **формула Даламбера**

Если в формуле Даламбера φ - дважды непрерывно дифференцируема, ψ - непрерывно дифференцируема, удовлетворяют уравнению и краевым условиям $(*) \Rightarrow \exists!$ решение, определяемое формулой Даламбера.

Для неоднородного:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Теорема. Пусть функция $f(x,t)$ в (4) непрерывна и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ в области $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$. Тогда задача (4) имеет единственное классическое решение

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (10)$$

31. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности. Метод разделения переменных для решения 1-ой краевой задачи.

Модель процессов распространения тепла.

$U(x,t)$-**температура** в сегменте с координатами x во время *t*. С боковых сторон стержень теплоизолирован.

Уравнение теплопроводности описывает процесс распространения тепла в твердом теле.

$F(x,t)$ - **плотность тепловых источников** , $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ - **коэффициент температуропроводности**

$f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{c\rho}$; c - **удельная теплоемкость** , k- **коэффициент теплопроводности**

ρ - **плотность**.

$U_t = a^2 \Delta U + f; \Delta U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ - **уравнение теплопроводности (параболического типа)**

Одномерное уравнение теплопроводности: $U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t)$.$\oplus$ краевые условия

Основные краевые условия: $1) U(l,t) = \mu(t) \quad 2) U_x(l,t) = \nu(t) \quad 3) U_x(l,t) = -\lambda[U(l,t) - \theta(t)]$

Первая краевая задача

$U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t). (1) \quad 0 \le x \le l \quad 0 \le t \le T$

$U(0,t) = \mu_1(t) \quad (2)$

$U(l,t) = \mu_2(t) \quad (3)$

$U(x,0) = \varphi(x) \quad 0 \le x \le l \quad (4)$

Вторая краевая задача

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} + f(x,t) \\ \left[\begin{array}{l} U_x(0,t) = \upsilon(t), 0 \le t \le T \\ U_x(l,t) = \upsilon_2(t) \end{array}\right. \\ U(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l \end{cases}$$

Задача Коши

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} & -\infty < x < \infty \\ U(x,0) = \varphi(x) & 0 \le t \le T \end{cases}$$

$Q_{lt} = \{(x,t): 0 < x < l, 0 < t \le T\}$

Определение: $U(x,t)$ - **решение 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности** *(1) - (4),* если

1) $U \in C[Q_{lt}]$ непр

2) $U \in C^2[Q_{lt}]$ *(* непрерывность вторых производных по x и первых по *t)*

3) $U(x,t)$ удовлетворяет *(1)-(4)*

Метод разделения переменных

$$1) \begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} \\ U(0,t) = 0; 0 \le x \le l \\ U(l,t) = 0; 0 \le t \le T \\ U(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l \end{cases}$$

Решение в виде $V(x,t) = X(x)T(t)$. Подставляем $\Rightarrow$ $X(x)T'(t) = a^2 T(t) X''(x)$

деля на $a^2XT \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(x)}{a^2T(x)} = -\lambda(\lambda = const) \Rightarrow \begin{cases} X''(x) = \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + a^2\lambda T(t) = 0 \end{cases}$

Для удовлетворяющих граничным условиям $\left. \begin{matrix} V(0,t) = X(0)T(t) = 0 \\ V(l,t) = X(l)T(t) = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} X(0) = 0 \\ X(l) = 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ Для $X(x)$ получаем задачу **Штурма-Лиувилля**. Для нее λ при которых $\exists$ нетривиальное решение- собственные значения задачи Штурма-Лиувилля. А соответствующая $X(x)$ - функция задачи Штурма-Лиувилля.

У такой задачи бесконечно много собственных значений $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ и собственных функций

$X_n(x) = c \bullet \sin\frac{n\pi}{l}x$ Пусть $c = 1, n = 1,2,\dots$

$\int_0^l X_n(x)X_m(x)dx = \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{l}\dot{x}\right)dx = \begin{cases} l/2, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases} = \frac{l}{2}\delta_{nm}$ - символ Кронекера

Теперь уравнение для $T(x)$ при известном λ:

$T_n{}'(t) = a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T(t) \Rightarrow T_n(t) = c_n \exp\left\{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right\}$

Следовательно $V_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = c_n \exp\left\{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right\}; n = 1,2,\dots$

$\forall V_n(x,t)$ - решение уравнения *(1) и (2) и (3)*

$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \bullet \exp\left\{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right\}$

Предполагая, что нужные условия выполнены.
Обеспечим выполнение (4)

$\varphi(x) = U(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\Bigg|$ умножим на $\sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)$ и $\int_0^l dx$

Надо найти c_n.

$\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^l \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \bullet \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx = c_n\frac{l}{2}$

$\Rightarrow c_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$, т.е. c_n являются коэффициенты ряда Фурье

$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)d\xi \bullet \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (*)$

Разложим в Фурье по *sin*

Получим (5) $\quad U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)\xi\partial\xi \bullet \exp\left\{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t\right\}\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$

Теорема (о существовании)

Пусть функция $\varphi \in C^2[0,l]$ *и* $\varphi(0) = \varphi(l) = 0 \Rightarrow$ у задачи *(1)- (4)* существует решение (классическое) определяемое формулой (5).